

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جدول شناسنامه اثر	
کد آموزش	۳۱۳-۰۰۳-۰۰۲
عنوان اثر	آموزش مقاومت مصالح (mechanics of materials) - فصل دوم: تنش و کرنش - بارگذاری محوری
تالیف	گروه مهندسی سیویل ژئوتک (civilgeotech)
گردآورنده	مهندس سید محمد صادق آل محمد
آدرس سایت	https://civilgeotech.ir/
ایمیل	info@civilgeotech.ir
نوع	فایل pdf
تعداد کل صفحات	۲۴ صفحه
فرهیخته گرامی: بازنشر این فایل باعث تضییع حقوق مادی و معنوی سایت سیویل ژئوتک خواهد شد و کپی بخش یا تمام این اثر شرعا و قانونا حرام و ممنوع است. لطفا فایل این آموزش را از سایت اصلی ما دریافت کنید.	

CIVILGEOTECH



فهرست مطالب

۲- فصل ۲: تنش و کرنش - بارگذاری محوری	۳
۲-۱- بخش ۱: کرنش عمودی در بارگذاری محوری / نمودار تنش - کرنش	۳
۲-۱-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۳
۲-۱-۲- کرنش عمودی در بارگذاری محوری	۳
۲-۱-۳- نمودار تنش - کرنش	۴
۲-۲- بخش ۲: قانون هوک، ضریب الاستیسیته / رفتار الاستیک در برابر رفتار پلاستیک	۶
۲-۲-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۶
۲-۲-۲- قانون هوک، ضریب الاستیسیته	۶
۲-۲-۳- رفتار الاستیک (ارتجاعی) ماده در برابر رفتار پلاستیک (خمیری)	۷
۲-۳- بخش ۳: بارگذاری تکراری، خستگی / تغییر شکل اعضا در بارگذاری محوری	۸
۲-۳-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۸
۲-۳-۲- بارگذاری تکراری، خستگی	۸
۲-۳-۳- تغییر شکل اعضا در بارگذاری محوری	۹
۲-۳-۴- مسئله ۱	۱۰
۲-۴- بخش ۴: مسائل نامعین استاتیکی / مسائل شامل تغییر دما	۱۲
۲-۴-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۱۲
۲-۴-۲- مسائل نامعین استاتیکی	۱۲
۲-۴-۳- مسئله ۲	۱۲
۲-۴-۴- مسائل شامل تغییر دما	۱۳
۲-۴-۵- مسئله ۳	۱۴
۲-۵- بخش ۵: نسبت پواسون / بارگذاری چند محوری، قانون عمومی هوک	۱۵
۲-۵-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۱۵
۲-۵-۲- نسبت پواسون	۱۵
۲-۵-۳- بارگذاری چند محوری، قانون عمومی هوک	۱۶
۲-۶- بخش ۶: کرنش برشی / رابطه میان ضریب الاستیسیته، نسبت پواسون و ضریب برشی	۱۷
۲-۶-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۱۷



- ۲-۶-۲- کرنش برشی ۱۷
- ۲-۶-۳- رابطه میان ضریب الاستیسیته، نسبت پواسون و ضریب برشی ۱۸
- ۲-۷-۷- بخش ۷: توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری، اصل سن و نان / تمرکز تنش / تغییر شکل‌های پلاستیک ۱۹
- ۲-۷-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند... ۱۹
- ۲-۷-۲- توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری، اصل سن و نان ۱۹
- ۲-۷-۳- تمرکز تنش ۲۰
- ۲-۷-۴- تغییر شکل‌های پلاستیک ۲۱
- ۲-۷-۵- مسئله ۴ ۲۱
- ۳- مراجع ۲۳

CIVILGEOTECH



۲- فصل ۲: تنش و کرنش - بارگذاری محوری

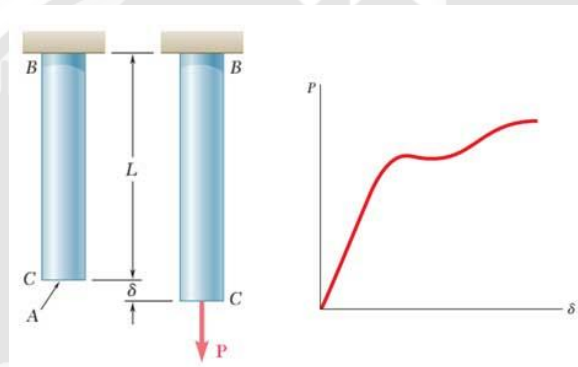
۲-۱- بخش ۱: کرنش عمودی در بارگذاری محوری / نمودار تنش - کرنش

۲-۱-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

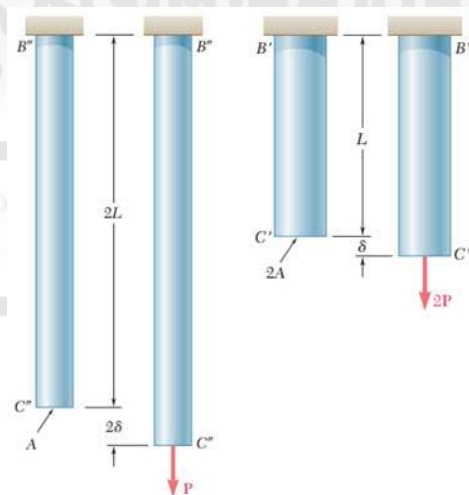
فصل دوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان تنش و کرنش - بارگذاری محوری در ۷ آموزش بررسی شده است. این آموزش بخش اول از این فصل می‌باشد. در این آموزش درباره مباحث کرنش عمودی در بارگذاری محوری و نمودار تنش - کرنش بحث خواهیم داشت.

۲-۱-۲- کرنش عمودی در بارگذاری محوری

در شکل زیر میله BC با طول L و سطح مقطع A در اثر بار P تغییر طول به مقدار δ پیدا می‌کند. تغییرات طول نسبت به بار در نمودار رسم می‌شود. باید به این نکته توجه نمود که نمی‌توان از این نمودار به طور مستقیم برای پیش بینی تغییر شکل میله‌ای از همین جنس اما با ابعاد متفاوت استفاده نمود.



حال اگر دو حالت زیر را در نظر بگیریم که طول میله دو برابر شود و یا اینکه مقدار بار دو برابر شود، در همه این حالات مقدار δ/L ثابت است.



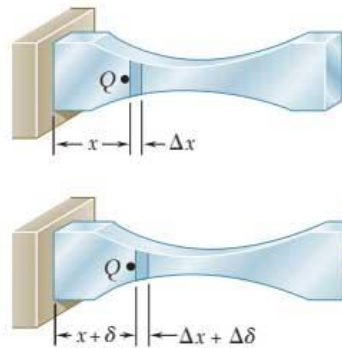
این موضوع ما را به تعریف کرنش می‌رساند. کرنش عمودی در میله‌ی تحت بارگذاری محوری را می‌توان به صورت تغییر شکل واحد طول میله تعریف کرد.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$



بنابراین با رسم نمودار تنش ($\sigma = P/A$) نسبت به کرنش ($\epsilon = \delta/L$) منحنی مشخصه خصوصیات ماده بدست می‌آید که به ابعاد نمونه ویژه‌ی مورد استفاده بستگی ندارد. این منحنی را نمودار تنش-کرنش می‌نامند.

در حالتی که سطح مقطع جسم متغیر است با توجه به اینکه تنش عمودی در طول عضو تغییر می‌کند باید کرنش در نقطه معین Q و با در نظر گرفتن جز کوچکی از طول تغییر شکل نیافته Δx تعریف کرد.



$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

همچنین به این نکته توجه داشته باشید که کرنش عمودی کمیتی بی بعد است.

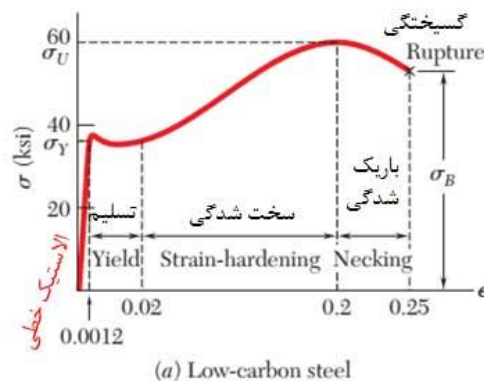
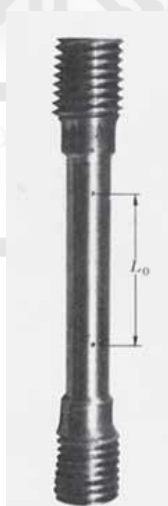
۲-۱-۳- نمودار تنش - کرنش

نمودار تنش ($\sigma = P/A$) نسبت به کرنش ($\epsilon = \delta/L$) با استفاده از آزمایش کشش در نمونه مد نظر از مصالح قابل رسم می‌باشد. نمودار تنش - کرنش مصالح مختلف متفاوت است. اما به طور کلی به دو دسته زیر تقسیم می‌شود:

۱- مصالح شکل پذیر مانند فولاد

۲- مصالح شکننده (ترد) مانند بتن

اگر نمونه فولاد تحت بارگذاری قرار دهیم در حالت افزایش تدریجی بار، نمودار تنش - کرنش زیر قابل رسم خواهد بود.



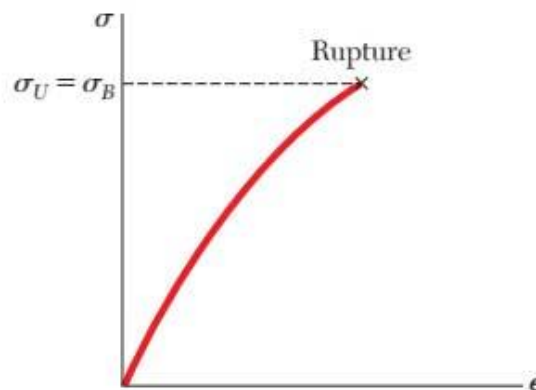
تنش σ_Y : مقاومت تسلیم
تنش σ_U : مقاومت نهایی
تنش σ_B : مقاومت شکست



با بارگذاری تدریجی نمونه اتفاقات زیر در نمونه و همچنین در نمودار آن قابل مشاهده است.

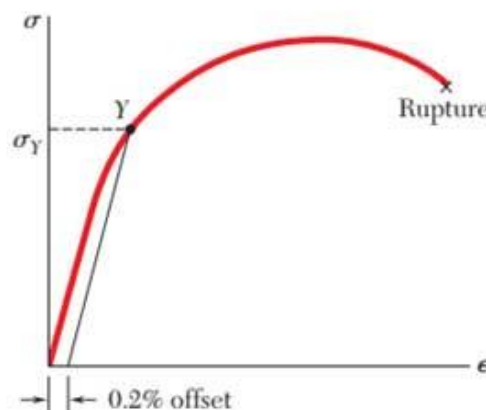
- ابتدا تنش نسبت به کرنش به صورت خطی و با شیب زیاد افزایش پیدا می‌کند.
- بعد از رسیدن به σ_Y با افزایش کم بار نمونه دچار تغییر شکل زیادی می‌شود. تغییر شکل در اثر لغزش ماده در امتداد سطح مایل ایجاد می‌شود بنابراین ابتدا ناشی از تنش برشی است.
- سخت شدگی کرنشی: تنش در محدوده بزرگی از کرنش ثابت باقی می‌ماند.
- پس از رسیدن بار به حداکثر مقدار معین قطر بخشی از نمونه باریک می‌شود.
- گسیختگی روی سطح مخروطی شکل با زاویه ۴۵ درجه اتفاق می‌افتد.

برای رسم نمودار تنش - کرنش مصالح شکننده در حین آزمایش، گسیختگی در نمونه بدون تغییر شکل قابل مشاهده اتفاق می‌افتد. در این حالت هیچ تفاوتی بین مقاومت نهایی و مقاومت شکست وجود ندارد. همچنین گسیختگی در سطح عمود بر امتداد بار روی می‌دهد و در ابتدا ناشی از تنش عمودی می‌باشد.



به این نکته توجه کنید که این آزمایش‌ها در دمای محیط انجام می‌شود.

در مورد بسیاری از مواد شکل پذیر مانند آلومینیم، تنش تا رسیدن به مقاومت نهایی افزایش پیدا می‌کند. پس از آن باریک شدگی آغاز شده و نمونه گسیخته می‌شود. در چنین مصالحی برای تعیین مقاومت تسلیم می‌توانیم به روش انحراف معیار عمل کنیم. برای این کار در مقدار کرنش 0.2% درصد خطی به موازات قسمت خطی نمودار رسم شده، محل قطع این خط با نمودار (نقطه Y) را به محور تنش عمود کرده و مقدار مقاومت تسلیم تعیین می‌شود.



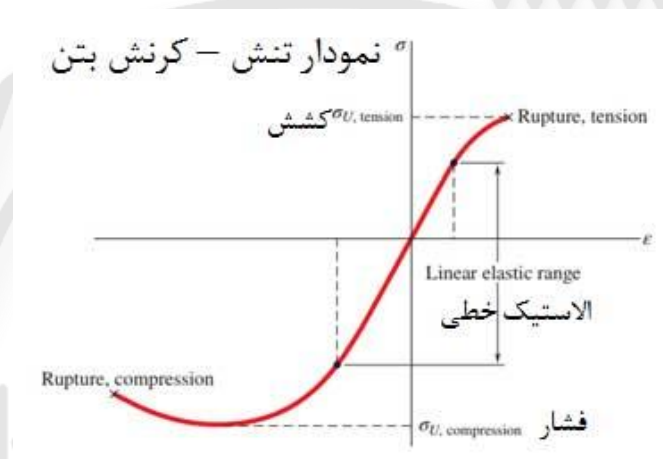


مقیاس شکل پذیری یک ماده به دو صورت زیر قابل تعریف است:

$$\begin{aligned} L_0 &: \text{طول اولیه} \\ L_B &: \text{طول نهایی} \\ A_0 &: \text{سطح مقطع اولیه} \\ A_B &: \text{سطح مقطع نهایی} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{درصد افزایش طول} &= 100 \frac{L_B - L_0}{L_0} \\ \text{درصد کاهش سطح} &= 100 \frac{A_0 - A_B}{A_0} \end{aligned}$$

حال نمودار تنش - کرنش را برای نمونه تحت فشار بررسی می‌کنیم. برای یک نوع معین از فولاد مقاومت تسلیم در کشش و فشار یکسان است. در بارگذاری فشاری باریک شدگی اتفاق نمی‌افتد. همچنین در مواد شکننده مقاومت فشاری نهایی نسبت به مقاومت کششی نهایی به دلیل وجود ترک و منافذ بسیار بیشتر است.



همانطور که گفته شد رفتار بتن در کشش و فشار متفاوت است. در کشش، در محدوده الاستیک خطی کرنش با تنش متناسب است. پس از رسیدن به نقطه تسلیم و تا رسیدن به حد گسیختگی، کرنش نسبت به تنش سریع‌تر افزایش پیدا می‌کند. در فشار، محدوده الاستیک خطی به مقدار زیادی بزرگتر است. با رسیدن تنش به مقدار حداکثر خود گسیختگی رخ نمی‌دهد و تنش با افزایش کرنش، کاهش می‌یابد. ذکر این نکته لازم است که ضریب الاستیسیته که با شیب بخش خطی نمودار بیان می‌شود، در کشش و فشار یکسان است.

۲-۲-۲: قانون هوک، ضریب الاستیسیته / رفتار الاستیک در برابر رفتار پلاستیک

۲-۲-۲-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

فصل دوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان تنش و کرنش - بارگذاری محوری در ۷ آموزش بررسی شده است. این آموزش بخش دوم از این فصل می‌باشد. در این آموزش درباره قانون هوک، ضریب الاستیسیته و رفتار الاستیک در برابر رفتار پلاستیک توضیح داده شده است.

۲-۲-۲-۲: قانون هوک، ضریب الاستیسیته

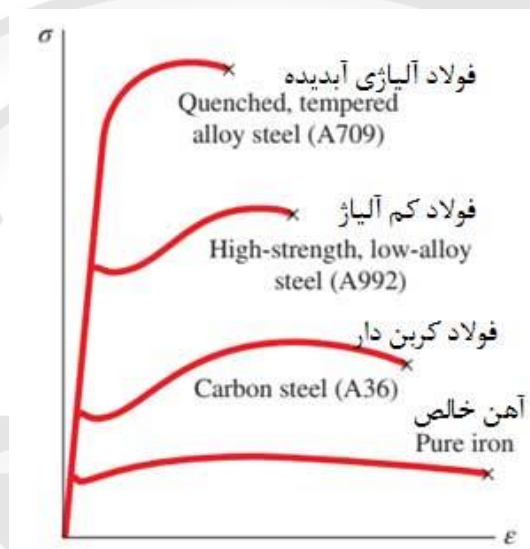
بر اساس قانون هوک رابطه بخش خطی نمودار تنش - کرنش به صورت زیر نوشته می‌شود که در این رابطه E ضریب الاستیسیته یا ضریب یانگ (Young's modulus - Modulus of Elasticity) می‌باشد.

$$\sigma = E \epsilon$$

با توجه به اینکه کرنش بی بعد است واحد ضریب الاستیسیته برحسب همان واحدهای تنش است.

در یک ماده معین بزرگترین مقدار تنشی که برای آن می‌توان از قانون هوک استفاده کرد، حد تناسب می‌نامیم. در مصالح شکل پذیر حد تناسب با نقطه تسلیم منطبق است. در مورد بقیه مواد با توجه به اینکه نمی‌توان به صورت دقیق معین کرد که رابطه بین تنش و کرنش چه زمانی از حالت خطی خارج می‌شود نمی‌توان حد تناسب را تعریف کرد.

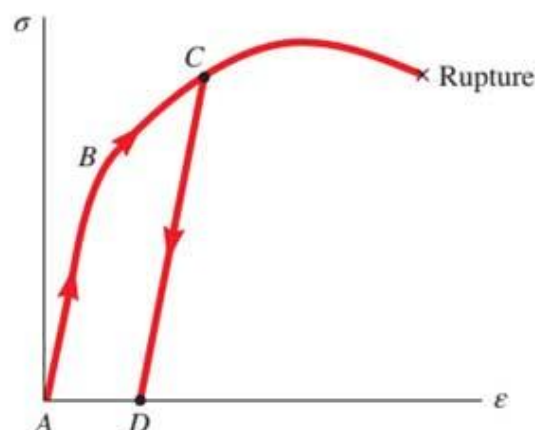
شکل زیر نمودار تنش کرنش آهن و انواع فولاد می‌باشد. براساس این نمودار مقاومت تسلیم، مقاومت نهایی و کرنش نهایی این چهار فلز با هم متفاوت است اما ضریب الاستیک همگی یکسان می‌باشد. در این مصالح سختی (توانایی مقاومت در برابر تغییر شکل) در محدوده خطی یکسان است. بنابراین اگر بجای فولاد کم مقاومت فولاد پر مقاومت با همان ابعاد مقطع استفاده شود، ظرفیت باربری سازه افزایش پیدا می‌کند اما سختی تغییر نمی‌کند. در مورد تمام مواردی که بررسی شد رابطه بین تنش و کرنش مستقل از امتداد بارگذاری است. زیرا خصوصیات مکانیکی ماده (شامل ضریب الاستیسیته) مستقل از امتداد مورد نظر هست. مواردی که خصوصیات آن‌ها به امتداد مورد نظر بستگی ندارد را ایزوتروپیک یا همسانگرد و مواردی که خصوصیات آن‌ها به امتداد مورد نظر بستگی دارد را غیر ایزوتروپیک یا ناهمسانگرد می‌نامند.



۲-۲-۳ رفتار الاستیک (ارتجاعی) ماده در برابر رفتار پلاستیک (خمیری)

اگر نمونه تحت بارگذاری، باربرداری شود و در این حالت کرنش‌های ایجاد شده از بین بروند این ماده رفتار الاستیک (ارتجاعی) دارد. مقدار تنشی که در آن حد ماده رفتار الاستیک دارد، حد الاستیک گویند. در موادی مانند فولاد که نقطه تسلیم مشخصی دارند، حد الاستیک، حد تناسب و نقطه تسلیم یکسانند.

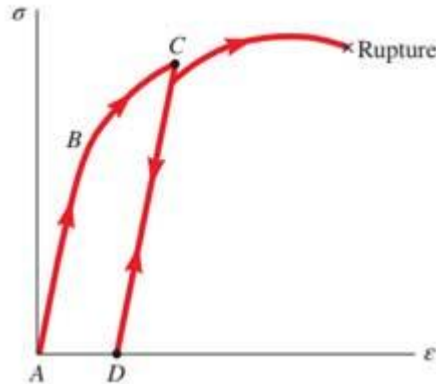
اگر نمونه تحت بارگذاری، باربرداری شود و در این حالت کرنش‌های ایجاد شده از بین نروند این ماده رفتار پلاستیک (خمیری) دارد.



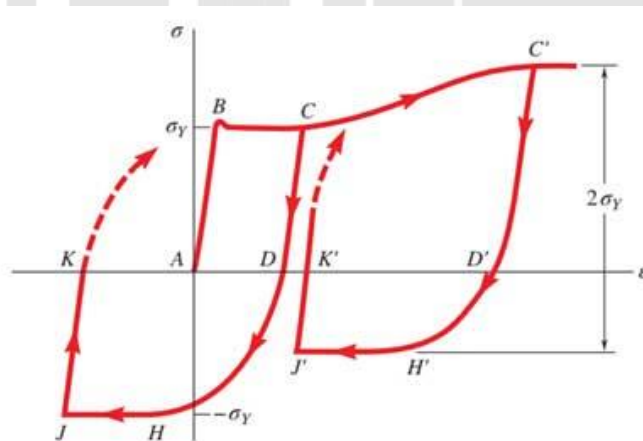


بنابراین تغییر شکل پلاستیک به دو عامل بستگی دارد. اولین عامل حداکثر مقدار تنش ایجاد شده (لغزش) و دومین عامل زمان سپری شده پیش از باربرداری (خزش) می‌باشد. اگر ماده نقطه تسلیم مشخصی نداشته باشد، حد الاستیک دقیق معین نمی‌شود.

اگر نمونه پس از بارگذاری و باربرداری، دوباره بارگذاری شود، (تا نقطه C) منحنی بارگذاری جدید تقریباً همان منحنی باربرداری اولیه را طی می‌کند. سپس همان منحنی خمیده تنش - کرنش اولیه را طی می‌کند.



در مصالح شکل پذیر مانند فولاد اگر در ناحیه تسلیم (C) و سخت شدگی (C') جهت بارگذاری را عوض کنیم یعنی بجای کشش، به مصالح نیروی فشاری وارد شود، دیگر خصوصیات مصالح قبل را نداریم و بعد از چند سیکل تغییر جهت بارگذاری مصالح ترد شده و می‌شکنند. این پدیده را اثر باوشینگ می‌نامند.



۲-۳-۳: بارگذاری تکراری، خستگی / تغییر شکل اعضا در بارگذاری محوری

۲-۳-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

فصل دوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان تنش و کرنش - بارگذاری محوری در ۷ آموزش بررسی شده است. این آموزش بخش سوم از این فصل می‌باشد. در این آموزش درباره بارگذاری تکراری، خستگی و تغییر شکل اعضا در بارگذاری محوری توضیح داده شده است.

۲-۳-۲: بارگذاری تکراری، خستگی

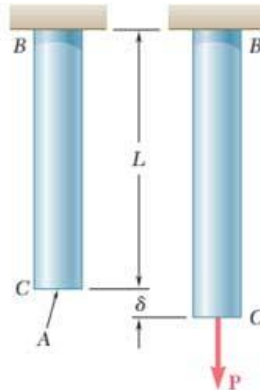
اگر تنش حداکثر در نمونه از حد الاستیک ماده تجاوز نکند پس از بار برداری نمونه به شرایط اولیه خود بازمی‌گردد. این موضوع برای چند صد مرتبه بارگذاری تکراری صحیح است اما اگر این چرخه میلیون‌ها بار تکرار بشود ماده در تنشی کمتر از مقاومت شکست استاتیکی گسیخته خواهد شد. این پدیده را خستگی می‌نامند. اگر حداکثر تنش افزایش یابد، تعداد چرخه‌های لازم برای گسیختگی کم می‌شود و اگر حداکثر تنش کاهش یابد، تعداد چرخه‌های لازم برای گسیختگی بیشتر می‌شود.



تنشی که در آن گسیختگی روی نمی‌دهد حتی اگر تعداد چرخه‌ها بی‌نهایت باشد را حد دوام گوئیم.

۲-۳-۳- تغییر شکل اعضا در بارگذاری محوری

در شکل زیر میله BC با طول L و سطح مقطع A در اثر بار P تغییر طول به مقدار δ پیدا می‌کند. مقدار تنش در آن برابر $(\sigma=P/A)$ خواهد بود.



حال براساس بخش خطی نمودار تنش- کرنش (قانون هوک) داریم:

$$\sigma = E\epsilon \rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \epsilon L$$

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

برای استفاده از رابطه فوق سه شرط زیر باید برقرار باشد.

(۱) مصالح باید همگن باشد. به عبارت دیگر خصوصیات مصالح از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر نکنند.

(۲) سطح مقطع A در طول میله یکنواخت باشد.

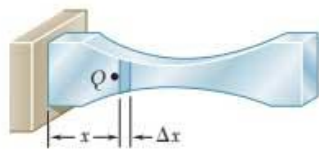
(۳) میله از بخش‌های انتهایی بارگذاری شود.

اگر میله شرایط فوق را نداشته باشد باید به چند جز تقسیم شده و هرکدام جداگانه بررسی شود. در این حالت رابطه به صورت زیر خواهد بود.

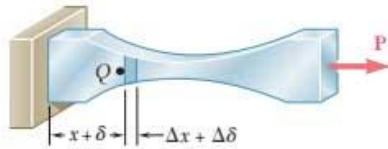
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$



حال اگر سطح مقطع میله متغییر باشد، رابطه زیر را خواهیم داشت.



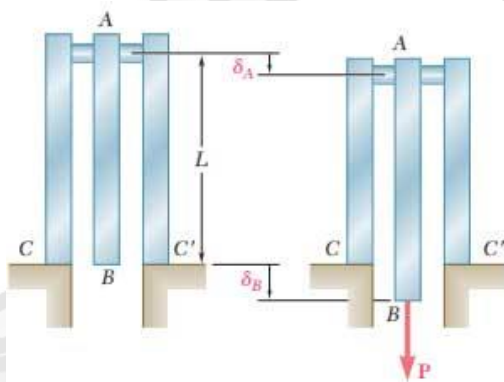
$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \rightarrow d\delta = \epsilon dx = \frac{P dx}{AE}$$



$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$

این رابطه برای حالتی است که سطح مقطع A و نیروی داخلی P میله تابعی از x باشد.

حال می خواهیم تغییر شکل درحالتی که دو انتهای میله حرکت کند را بررسی کنیم. در این حالت تغییر شکل میله با تغییر مکان نسبی یک انتهای آن نسبت به انتهای دیگر اندازه گیری می شود.

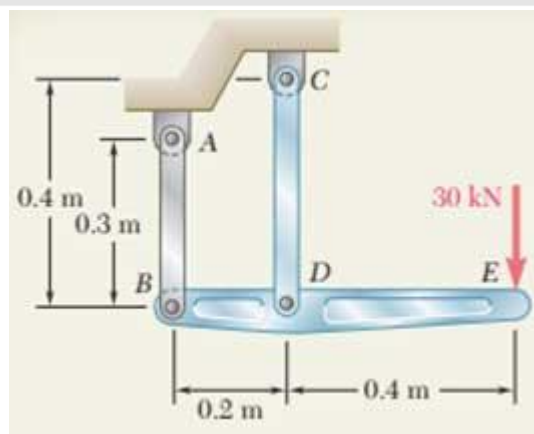


$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE}$$

۲-۳-۴- مسئله ۱

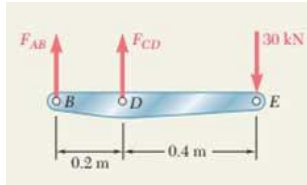
برای فهم بهتر پاسخ سوالات به ویدیو آموزش مراجعه کنید.

میله صلب BDE توسط میله های رابط AB و CD ثابت نگه داشته شده است. میله ی رابط AB از آلومینیم ($E=70\text{GPa}$) و با سطح مقطع 500mm^2 و میله رابط CD از فولاد ($E=200\text{GPa}$) و با سطح مقطع سطح مقطع 600mm^2 ساخته شده است. با توجه به نیروی 30kN نشان داده شده، تغییر مکان نقاط B، D و E را تعیین کنید.





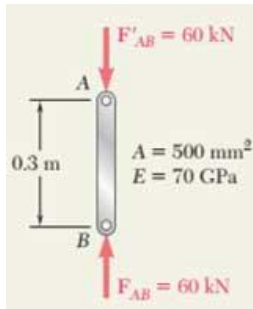
ابتدا نمودار جسم آزاد میله BDE رسم می‌شود تا عکس العمل‌های تکیه‌گاهی محاسبه شوند.



$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \rightarrow -30 \times 0.6 + F_{CD} \times 0.2 = 0 \rightarrow F_{CD} = 90 \text{ kN} \text{ کششی}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -30 + 90 + F_{AB} = 0 \rightarrow F_{AB} = -60 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

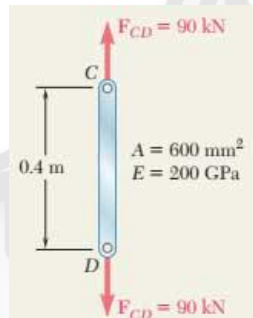
تغییر مکان نقاط B:



$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3) \times (0.3)}{(500 \times 10^{-6}) \times (70 \times 10^9)} = -0.514 \text{ mm}$$

علامت منفی به معنی انقباض عضو AB و تغییر مکان رو به بالای انتهای B است.

تغییر مکان نقاط D:

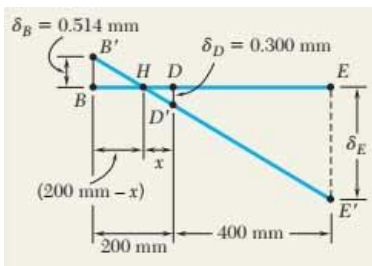


$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3) \times (0.4)}{(600 \times 10^{-6}) \times (200 \times 10^9)} = 0.3 \text{ mm}$$

علامت مثبت به معنای تغییر مکان رو به پایین است.

تغییر مکان نقاط E:

با توجه به صلب بودن میله BDE نقاط B' و D' و E' در یک راستا خواهند بود.



$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \rightarrow \frac{0.514}{0.3} = \frac{200 - x}{x} \rightarrow x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \rightarrow \frac{\delta_E}{0.3} = \frac{400 + 73.7}{73.7} \rightarrow \delta_E = 1.928 \text{ mm}$$

علامت مثبت به معنای تغییر مکان رو به پایین است.



۲-۴-۲- بخش ۴: مسائل نامعین استاتیکی / مسائل شامل تغییر دما

۲-۴-۲-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

فصل دوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان تنش و کرنش - بارگذاری محوری در ۷ آموزش بررسی شده است. این آموزش بخش چهارم از این فصل می باشد. در این آموزش درباره مسائل نامعین استاتیکی و مسائل شامل تغییر دما توضیح داده شده است.

۲-۴-۲- مسائل نامعین استاتیکی

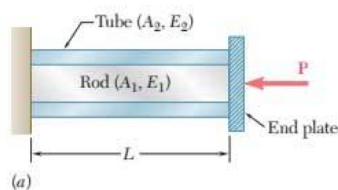
مسائل نامعین استاتیکی تنها با معادلات تعادل قابل حل نیستند. در مسائل نامعین استاتیکی تعداد مجهولات (قیدها) بیشتر از معادلات مستقل تعادل می باشد. برای حل مسائل نامعین استاتیکی باید از معادلات تعادل به همراه معادلات سازگاری تغییر شکل ها که رابطه بین تغییر شکل های سازه و هندسه آن است، استفاده نمود. در تحلیل سازه های نامعین استاتیکی ابعاد مقطع و خصوصیات مصالح اثر گذارند.

برای حل مسائل نامعین استاتیکی از روش برهم نهی یا اصل جمع آثار (super position) نیز استفاده می شود. در سازه نامعین، تعداد تکیه گاه ها بیشتر از تعداد مورد نیاز برای تعادل سازه است. در این حالت تعداد قیود اضافی حذف شده و این واکنش اضافی به صورت بار مجهول در نظر گرفته می شود. برای تحلیل اثر جداگانه تغییر شکل های ناشی از بارهای مفروض و واکنش های اضافی محاسبه شده و با هم جمع می شوند. استفاده از این روش شرایطی دارد که در بخش قانون عمومی هوک صحبت خواهد شد.

۲-۴-۲-۳- مسئله ۲

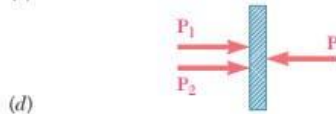
برای فهم بهتر پاسخ سوالات به ویدیو آموزش مراجعه کنید.

تغییر شکل میله و لوله در اثر اعمال نیروی P به صفحه صلب انتهایی چقدر است؟



عضو	طول	سطح مقطع	ضریب الاستیسیته
میله	L	A_1	E_1
لوله	L	A_2	E_2

نمودار جسم آزاد هر سه عضو را رسم می کنیم. داریم:



$$P_1 + P_2 = P$$

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2}$$

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow \frac{P_1 L}{A_1 E_1} = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \rightarrow \frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2}$$

از حل همزمان معادلاتی که در کادر قرمز رنگ هستند داریم:

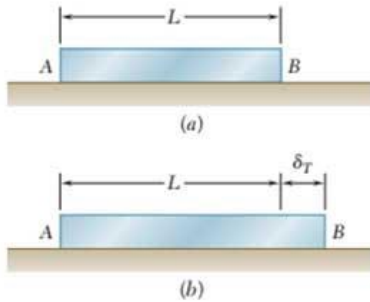
$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$



حال برای تعیین تغییر شکل یکسان لوله و میله می توان مقادیر محاسبه شده را در معادلات δ_1 یا δ_2 قرار داد.

۲-۴-۴- مسائل شامل تغییر دما

میله AB همگن با مقطع یکنواخت می باشد و آزادانه روی سطح افقی قرار دارد. با افزایش دما به اندازه ΔT طول میله به اندازه δ_T افزایش می یابد.



α : ضریب انبساط حرارتی

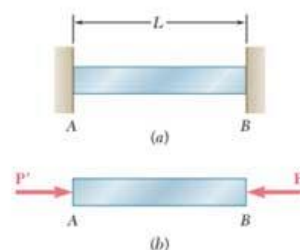
$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (\text{واحد: معکوس درجه فرنهایت یا سانتی گراد})$$

در این صورت کرنش حرارتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\epsilon_T = \frac{\delta_T}{L} \quad \epsilon_T = \alpha \Delta T$$

در این حالت کرنش ایجاد شده با هیچ تنش همراه نیست.

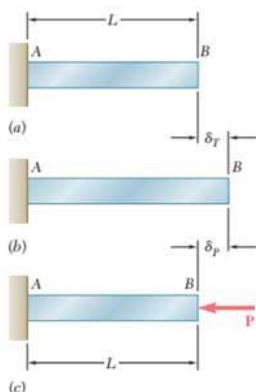
حال حالت زیر را در نظر می گیریم. میله AB همگن با مقطع یکنواخت می باشد که بین دو تکیه گاه ثابت قرار دارد. با افزایش دما به اندازه ΔT باتوجه به مقید بودن میله $\delta_T=0$ خواهد بود.



$$\epsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = 0$$

در این حالت تنش بدون کرنش می باشد.

برای محاسبه تنش ناشی از تغییر دما در این حالت با توجه به اینکه میله در بین دو تکیه گاه صلب می باشد، مسئله از نظر استاتیکی نامعین است. بنابراین از روش برهم نهی استفاده می کنیم. تکیه گاه B حذف شده و بجای آن یک نیروی معادل قرار می دهیم. داریم:



در شکل b $\delta_T = \alpha(\Delta T)L$

در شکل c $\delta_P = \frac{PL}{AE} \rightarrow \delta = \delta_T + \delta_P = 0 \rightarrow \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$
 $\rightarrow P = -AE\alpha(\Delta T)$

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

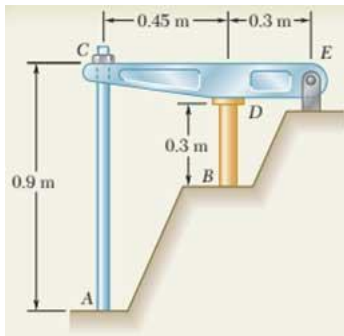


رابطه تنش محاسبه شده برای میله همگن با مقطع یکنواخت قابل استفاده است.

۲-۴-۵- مسائل ۳

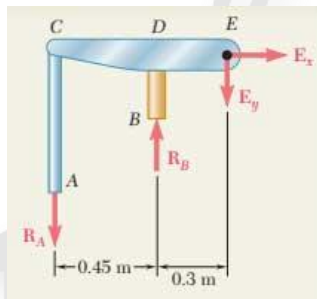
برای فهم بهتر پاسخ سوالات به ویدیو آموزش مراجعه کنید.

در حالتی که دمای میله فولادی ۲۰ درجه سانتی گراد باشد، دمای استوانه برنجی تا ۵۰ درجه سانتی گراد افزایش داده می شود. با فرض اینکه پیش از تغییر دما هیچ تنشی وجود نداشته باشد، مقدار تنش در استوانه برنجی چقدر است؟



عضو	قطر	α	ضریب الاستیسیته
استوانه برنجی BD	30 mm	$20.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	105 GPa
میله فولادی AC	22 mm	$11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	200 GPa

دیاگرام آزاد جسم رسم می شود.

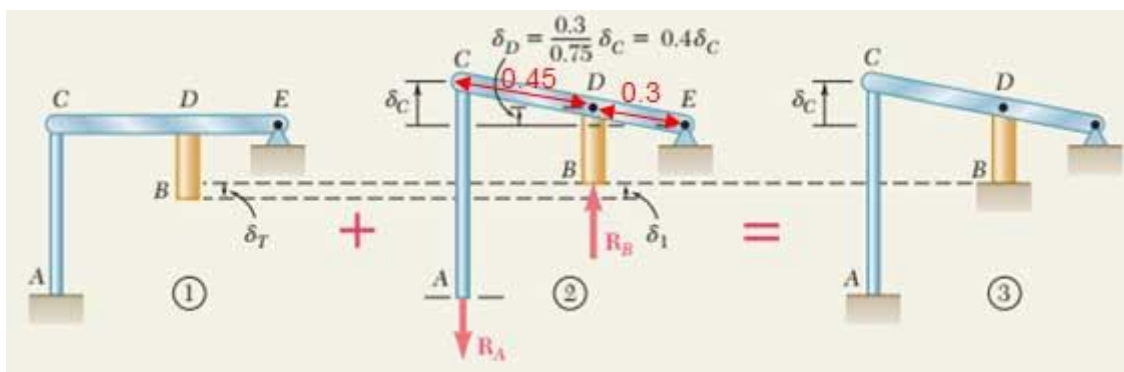


$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0 \rightarrow R_A \times 0.75 - R_B \times 0.3 = 0 \rightarrow R_A = 0.4R_B$$

با توجه به اینکه مقدار تنش در استوانه برنجی خواسته شده باید:

$$\sigma_B = \frac{R_B}{A}$$

با استفاده از اصل جمع قوا اقدام به حل مسئله می کنیم. به عنوان واکنش اضافی حذف می کنیم. با افزایش دما، نقطه B به اندازه δ_T به سمت پایین حرکت می کند. با توجه به اینکه تغییر مکان نقطه B صفر است، δ_1 ناشی از R_B باید با δ_T برابر باشد.





$$\Delta T = 50 - 20 = 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\delta_{T(BD)} = L(\Delta T)\alpha = 0.3 \times 30 \times 20.9 \times 10^{-6} = 188.1 \times 10^{-6} \text{ m} \downarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{در شکل ۲} \\ \delta_D = 0.4\delta_C \\ \delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A \times 0.9}{\left(\pi \left(\frac{0.022}{2}\right)^2\right) \times (200 \times 10^9)} = 11.84 \times 10^{-9} R_A \uparrow \\ \delta_D = 0.4\delta_C = 0.4 \times 11.84 \times 10^{-9} R_A = 4.74 \times 10^{-9} R_A \uparrow \\ \delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B \times 0.3}{\left(\pi \left(\frac{0.03}{2}\right)^2\right) \times (105 \times 10^9)} = 4.04 \times 10^{-9} R_B \uparrow \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} \\ R_A = 0.4R_B \end{array} \right\} \delta_1 = (4.74 \times 10^{-9} \times (0.4R_B)) + 4.04 \times 10^{-9} R_B = 5.94 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

همچنین گفتیم که با توجه به اینکه تغییر مکان نقطه B صفر است، δ_1 ناشی از R_B باید با δ_T برابر باشد.

$$\delta_1 = \delta_T \rightarrow 5.94 \times 10^{-9} R_B = 188.1 \times 10^{-6} \rightarrow R_B = 31.7 \text{ kN}$$

$$\sigma_B = \frac{R_B}{A} = \frac{31.7}{\pi \left(\frac{0.03}{2}\right)^2} = 44869 \text{ kPa} = 44.9 \text{ MPa}$$

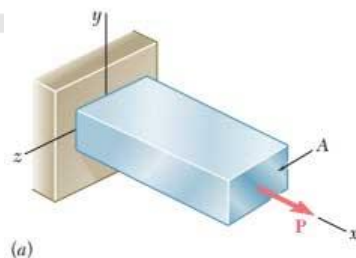
۲-۵-۵: نسبت پواسون / بارگذاری چند محوری، قانون عمومی هوک

۲-۵-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

فصل دوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان تنش و کرنش - بارگذاری محوری در ۷ آموزش بررسی شده است. این آموزش بخش پنجم از این فصل می باشد. در این آموزش درباره نسبت پواسون و بارگذاری چند محوری - قانون عمومی هوک توضیح داده شده است.

۲-۵-۲: نسبت پواسون

با بارگذاری یک میله همگن در محدوده الاستیک خطی تنش و کرنش از قانون هوک پیروی می کنند. اگر نیروی P در امتداد محور X به میله وارد شود تنش و کرنش در این راستا به صورت زیر خواهند بود.



$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

در راستای Y و Z با توجه به اینکه ماده همگن و همسانگرد می باشد، مقدار تنش $\sigma_y = \sigma_z = 0$ و مقدار کرنش $\epsilon_y = \epsilon_z$ خواهند بود که به این مقدار مشترک کرنش جانبی گفته می شود.



برای ماده مقدار ثابت مهمی به نام نسبت پواسون وجود دارد. در این رابطه علامت منفی برای این است که حاصل ν مثبت شود، زیرا کرنش جانبی و محوی غیر هم علامت هستند.

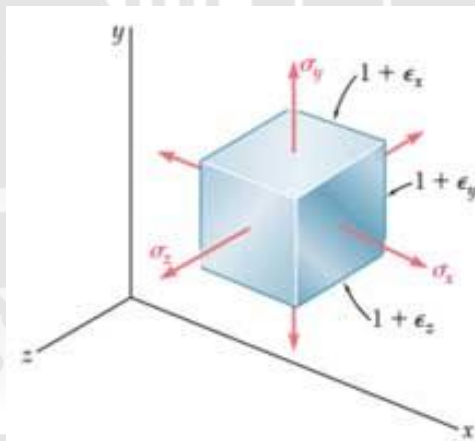
$$\nu = -\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

بنابراین روابط کرنش به صورت زیر خواهند بود.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

۲-۵-۳- بارگذاری چند محوری، قانون عمومی هوک

حال می‌خواهیم شرایط جسم تحت اثر بارگذاری چند محوری بررسی کنیم. اگر در امتداد سه محور مختصات سه تنش عمودی σ_x و σ_y و σ_z و بدون تنش برشی داشته باشیم. یک المان مکعبی همسانگرد با ابعاد ۱ واحد فرض می‌کنیم. فقط تغییر شکل واقعی المان را در نظر می‌گیریم و تغییر مکان احتمالی در نظر گرفته نمی‌شود. برای بیان مولفه‌های کرنش بر حسب مولفه‌های تنش از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.



برای استفاده از اصل جمع قوا باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱- اثر هر بار با آن بار رابطه خطی داشته باشد. این حالت زمانی برقرار است که تنش‌ها از حد تناسب ماده تجاوز نکنند.

۲- تغییر شکل ناشی از هر بار معین کوچک باشد و هیچ گونه تاثیری بر شرایط اعمال بارهای دیگر نداشته باشد. این حالت زمانی برقرار است که تنش روی هر سطح معین باعث تغییر شکل بزرگی روی سطوح دیگر نشود.



مقادیر کرنش با استفاده از اصل جمع قوا به صورت زیر خواهند بود. این رابطه قانون عمومی هوک برای بارگذاری چند محوری ماده همگن و همسانگرد را نشان می‌دهد.

تنش σ_x	$\rightarrow$	$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$	$\rightarrow$	در امتداد y و z	$\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$
تنش σ_y	$\rightarrow$	$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$	$\rightarrow$	در امتداد x و z	$\epsilon_x = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_y}{E}$
تنش σ_z	$\rightarrow$	$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$	$\rightarrow$	در امتداد x و y	$\epsilon_y = \epsilon_x = -\frac{\nu\sigma_z}{E}$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

به عنوان یاد آوری علامت مثبت به معنای تنش کششی و کرنش انبساطی و علامت منفی به معنای تنش فشاری و کرنش انقباضی می‌باشد.

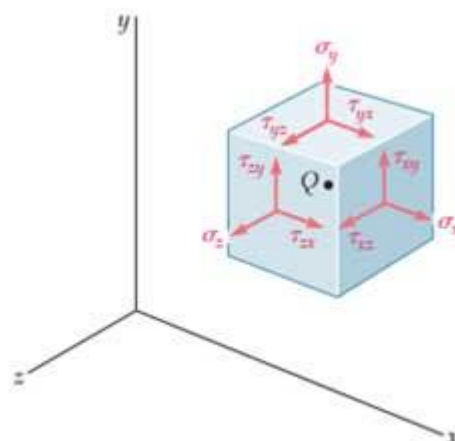
۲-۶-۲: کرنش برشی / رابطه میان ضریب الاستیسیته، نسبت پواسون و ضریب برشی

۲-۶-۲-۱: آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

فصل دوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان تنش و کرنش - بارگذاری محوری در ۷ آموزش بررسی شده است. این بخش ششم از این فصل می‌باشد. در این آموزش درباره کرنش برشی و رابطه میان ضریب الاستیسیته، نسبت پواسون و ضریب برشی توضیح داده شده است.

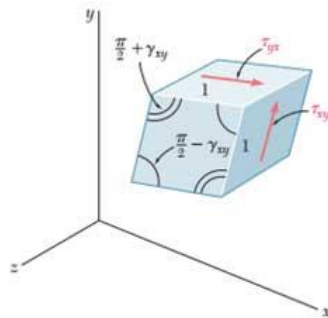
۲-۶-۲-۲: کرنش برشی

مانند شکل زیر حالت عمومی تر تنش، تنش عمودی همراه با تنش برشی می‌باشد. تنش‌های برشی تاثیر مستقیمی بر کرنش‌های عمودی ندارند و باعث تغییر شکل المان به صورت متوازی السطوح مایل می‌شوند.





برای بررسی کرنش برشی المان مکعبی با ابعاد واحد تحت تنش برشی τ_{xy} و τ_{yx} فرض می‌کنیم. در این حالت مقدار دو زاویه از المان افزایش و دو زاویه کاهش می‌یابد. زاویه γ_{xy} نشان دهنده کرنشی برشی متناظر با امتداد X و Y است. نمودار تنش - کرنش برشی در این حالت با آزمایش پیچش رسم می‌شود. برای ماده همگن و همسانگرد اگر تنش برشی از حد تناسب ماده تجاوز نکند داریم:



$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

G: ضریب صلبیت - ضریب برشی - مدول برشی

این رابطه بیان‌گر قانون هوک برای تنش و کرنش برشی می‌باشد. قانون عمومی هوک برای ماده همگن و همسانگرد در عمومی‌ترین شرایط تنش به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

۲-۶-۳- رابطه میان ضریب الاستیسیته، نسبت پواسون و ضریب برشی

همانطور که گفتیم ضریب الاستیسیته با E و نسبت پواسون با ν و ضریب برشی G نمایش داده می‌شوند. برای محاسبه تغییر شکل‌های ماده کافی است با آزمایش دو پارامتر محاسبه شود و پارامتر سوم از روابط زیر معین می‌گردد.

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

به طور خلاصه برای اثبات این رابطه، رابطه بین کرنش عمودی و برشی در یک المان مکعبی که بایک صفحه مایل برش داده شده است بررسی شده و رابطه این سه پارامتر با هم معین می‌شود.

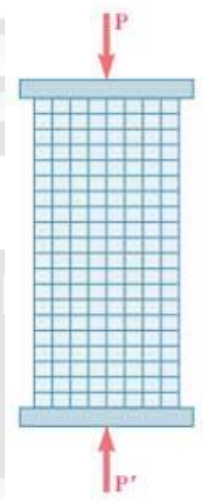


۷-۲- بخش ۷: توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری، اصل سن و نان / تمرکز تنش / تغییر شکل های پلاستیک ۷-۲-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

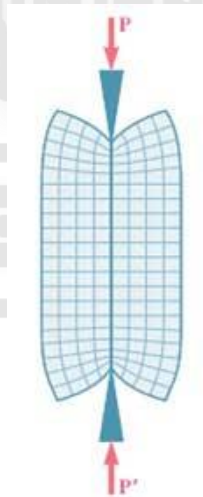
فصل دوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان تنش و کرنش - بارگذاری محوری در ۷ آموزش بررسی شده است. این آموزش بخش هفتم از این فصل می باشد. در این آموزش درباره توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری - اصل سن و نان، تمرکز تنش و تغییر شکل های پلاستیک توضیح داده شده است.

۷-۲-۲- توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری، اصل سن و نان

ماده همگن همسانگرد مانند شکل زیر بین دو صفحه صلب قرار می گیرد و تحت بارگذاری تمامی اجزا عضو به شکل یکسان تغییر شکل می دهند.

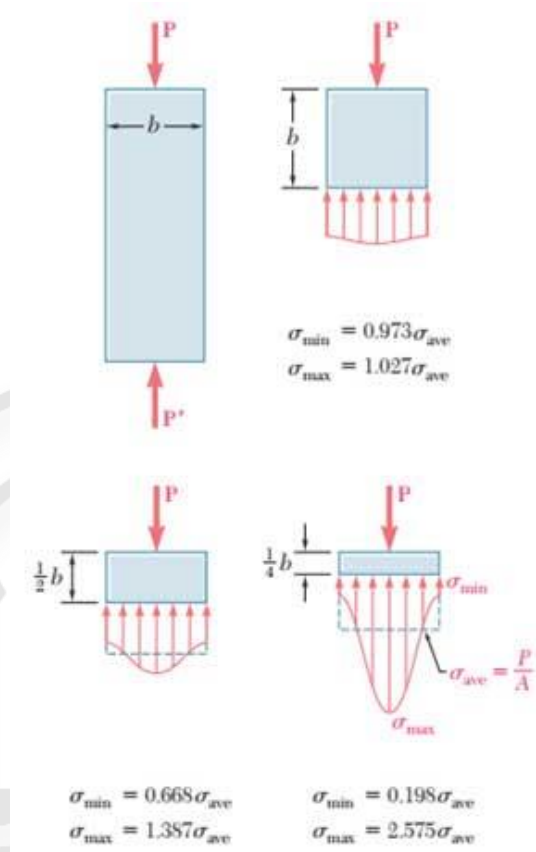


حال اگر ماده تحت بار متمرکز باشد. در این حالت نقاط مجاور بار تنش ها بزرگ و نقاط نزدیک به دو انتهای عضو تحت اثر بارگذاری قرار نمی گیرند.



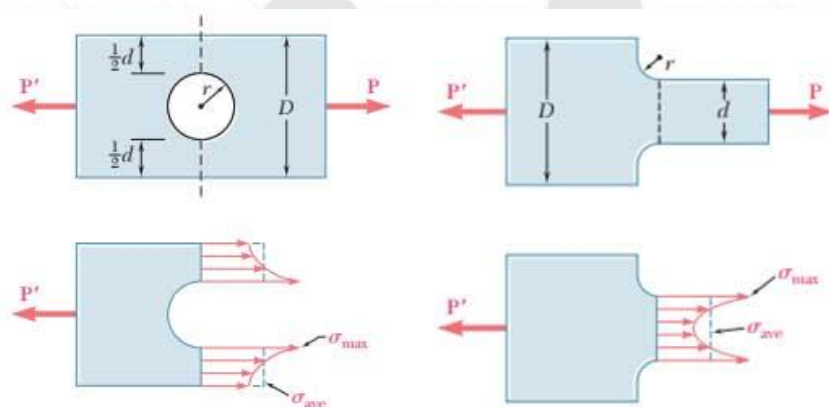


در شکل زیر در فاصله b از هر انتهای عضو (b اندازه عرض عضو) توزیع تنش در هر مقطع یکنواخت است. بنابراین در مورد هر نوع بارگذاری توزیع تنش مستقل از حالت واقعی اعمال بارها فرض می‌شود. این موضوع اصل سن و نان نام دارد.



۲-۷-۳- تمرکز تنش

وجود سوراخ یا تغییر ناگهانی سطح مقطع باعث ایجاد تنش متمرکز می‌شود. نتایج این تنش‌ها با استفاده از آزمایش تجربی معین می‌شود. در سوراخ به نسبت r/d و در ماهیچه ای به نسبت r/d و D/d بستگی دارد. در طراحی مهم این است که تنش در عضو از حد تنش مجاز تجاوز می‌کند یا نه. یعنی ماکسیمم تنش مهم است و محل این تجاوز تنش در طراحی مورد بحث نیست.



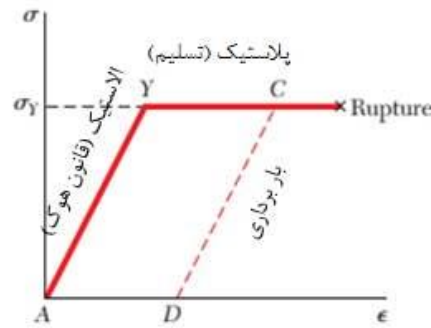
ضریب تمرکز تنش ناپیوستگی با رابطه زیر قابل محاسبه است. همچنین با استفاده از نمودارهای مربوطه می‌توان مقدار k را برداشت نمود.

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$$



۲-۷-۴- تغییر شکل‌های پلاستیک

در تمامی عناوین قبل فرض بر رفتار خطی الاستیک ماده بود. این فرض برای مصالح ترد منطقی است اما در مورد مواد شکل پذیر، با برداشتن بار در محدوده خطی تغییر شکل‌ها برمی‌گردد. همچنین اگر تنش‌ها از حد تسلیم ماده تجاوز نکنند تغییر شکل‌های خمیری روی می‌دهد. بنابراین در مواد شکل پذیر تحلیل بر اساس رابطه غیر خطی تنش - کرنش انجام می‌شود. در این حالت تحلیل‌ها با فرض ماده الاستوپلاستیک ایده‌آل انجام می‌شود.



حال می‌خواهیم تمرکز تنش در ماده الاستوپلاستیک را بررسی کنیم. این کار زمانی که تنش ماکسیمم (σ_{max}) از مقاومت تسلیم (σ_y) تجاوز می‌کند، انجام می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ave} = \frac{P}{A} \\ K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{l} P = \sigma_{ave} A = \frac{\sigma_{max} A}{K} \\ \sigma_{max} = \sigma_y \text{ زمانی که:} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K} \\ P = P_U \rightarrow \sigma_{ave} = \sigma_y \rightarrow P_U = \sigma_y A \text{ زمانی که:} \end{array} \right] \left. \right\} P_Y = \frac{P_U}{K}$$

P_U : باری که باعث گسیختگی می‌شود.

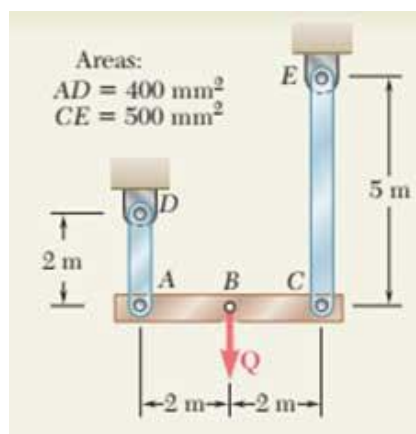
P_Y : باری که می‌توان بدون تغییر شکل دائمی به میله وارد کرد

۲-۷-۵- مسئله ۴

برای فهم بهتر پاسخ سوالات به ویدیو آموزش مراجعه کنید.

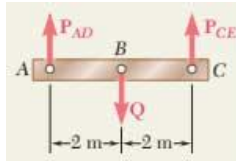
تیر صلب ABC از دو میله فولادی نشان داده شده آویزان است و در ابتدا حالت افقی دارد. با اعمال آهسته نیروی Q، نقطه‌ای میانی B از تیر به اندازه‌ی 10mm به سمت پایین تغییر مکان می‌دهد و سپس نیرو به صورت تدریجی برداشته می‌شود. با فرض الاستوپلاستیک بودن فولاد با $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$ و $E = 200 \text{ GPa}$ تعیین کنید:

الف) حداکثر مقدار Q لازم و موقعیت متناظر تیر ب) موقعیت نهایی تیر





ابتدا دیاگرام آزاد تیر رسم می‌شود.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow P_{AD} + P_{CE} = Q \rightarrow Q = 2P_{AD}$$

در محدوده الاستیک: میزان تنش در عضو AD برابر تنش تسلیم است، اگر حداکثر مقدار Q و حداکثر تغییر مکان نقطه A اتفاق افتد. چون عضو AD نسبت به عضو CE مقطع کوچکتری دارد زودتر به تنش تسلیم می‌رسد.

$$(P_{AD})_{max} = \sigma_Y A = (300 \times 10^6) \times (400 \times 10^{-6}) = 12 \times 10^4 Pa = 120 kN$$

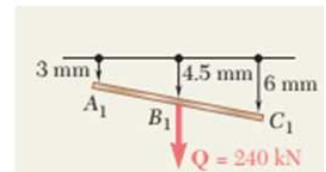
$$Q_{max} = 2(P_{AD})_{max} = 2 \times 120 = 240 kN$$

$$\delta_A = \epsilon L = \frac{\sigma_Y}{E} L = \frac{300}{200 \times 10^3} \times (2 \times 10^3) = 3 mm$$

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120 \times 10^3}{500 \times 10^{-6}} \times 10^{-6} = 240 MPa$$

$$\delta_C = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E} L = \frac{240}{200 \times 10^3} \times (5 \times 10^3) = 6 mm$$

$$\delta_B = \frac{1}{2}(\delta_A + \delta_C) = 4.5 mm < 10 mm \rightarrow \text{محدوده پلاستیک} \quad \text{در } \sigma_Y = 300 MPa \text{ مقدار } \delta_B = 10 mm \text{ می‌باشد.}$$

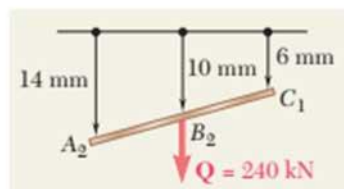


با توجه به اینکه در محدوده پلاستیک هستیم:

$$\delta_B = 10 mm$$

$$\sigma_{CE} = 240 MPa < \sigma_Y = 300 MPa \rightarrow \text{محدوده الاستیک} \rightarrow \delta_C = 6 mm$$

$$\delta_B = \frac{1}{2}(\delta_A + \delta_C) \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}(\delta_A + 6) \rightarrow \delta_A = 14 mm$$

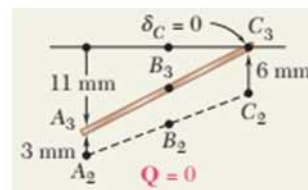


باربرداری شود

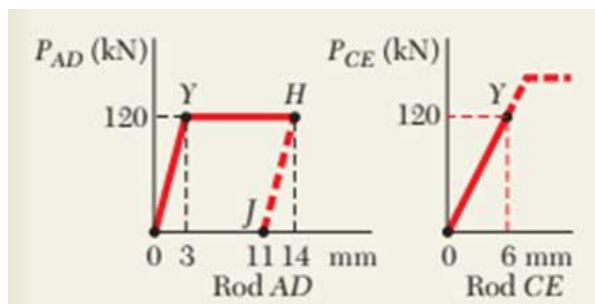
$$\delta_C = 0 mm \rightarrow \text{محدوده الاستیک}$$

$$\delta_A = 14 - 3 = 11 mm$$

$$\delta_B = 10 - 4.5 = 5.5 mm$$



بنابراین نمودارهای بار - تغییر شکل به صورت زیر خواهند بود.



۳- مراجع

Beer, Ferdinand, P. and Johnston, E, Russell. and DeWolf, John. and Mazurek, David. (2020). Mechanics of Materials. 8th Edition. McGraw Hill