

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جدول شناسنامه اثر	
کد آموزش	۳۱۳-۰۰۳-۰۰۳
عنوان اثر	آموزش مقاومت مصالح (mechanics of materials) - فصل سوم: پیچش
تالیف	گروه مهندسی سیویل ژئوتک (civilgeotech)
گردآورنده	مهندس سید محمد صادق آل محمد
آدرس سایت	https://civilgeotech.ir/
ایمیل	info@civilgeotech.ir
نوع	فایل pdf
تعداد کل صفحات	۱۳ صفحه
فرهیخته گرامی: بازنشر این فایل باعث تضییع حقوق مادی و معنوی سایت سیویل ژئوتک خواهد شد و کپی بخش یا تمام این اثر شرعا و قانونا حرام و ممنوع است. لطفا فایل این آموزش را از سایت اصلی ما دریافت کنید.	

CIVILGEOTECH



فهرست مطالب

۳- فصل ۳: پیچش.....	۲
۳-۱- بخش ۱: تنش و تغییر شکل در محورهای گرد - تنش در محدوده الاستیک.....	۲
۳-۱-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۲
۳-۱-۲- بحث مقدماتی تنش در محورهای گرد.....	۲
۳-۱-۳- تغییر شکل در محور گرد.....	۳
۳-۱-۴- تنش‌های محدوده‌ی الاستیک.....	۴
۳-۱-۵- مسئله ۱-۳.....	۶
۳-۲- بخش ۲: زاویه پیچش در محدوده‌ی الاستیک - پیچش در محورهای نامعین استاتیکی.....	۷
۳-۲-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۷
۳-۲-۲- زاویه پیچش در محدوده‌ی الاستیک.....	۷
۳-۲-۳- پیچش در محورهای نامعین استاتیکی.....	۹
۳-۲-۴- مسئله ۳-۵.....	۹
۳-۳- بخش ۳: طراحی محورهای انتقال نیرو - تمرکز تنش در محورهای گرد.....	۱۰
۳-۳-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند.....	۱۰
۳-۳-۲- طراحی محورهای انتقال نیرو.....	۱۱
۳-۳-۳- تمرکز تنش در محورهای گرد.....	۱۱
۴- مراجع.....	۱۲

CIVILGEOTECH



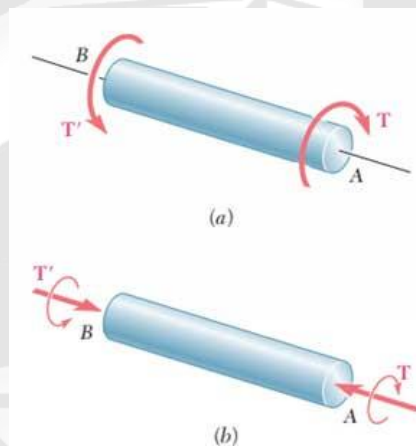
۳- فصل ۳: پیچش

۳-۱- بخش ۱: تنش و تغییر شکل در محورهای گرد - تنش در محدوده الاستیک

۳-۱-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

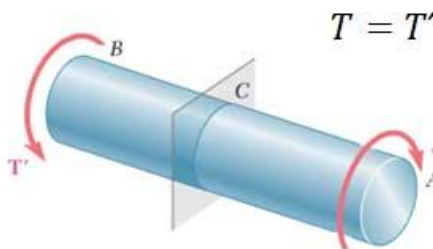
این آموزش بخش اول از فصل سوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان پیچش می باشد. در این آموزش درباره بحث مقدماتی تنش در محورهای گرد، تغییر شکل در محور گرد و تنش های محدوده ی الاستیک بحث خواهیم داشت.

در دو فصل گذشته به بررسی چگونگی محاسبه ی تنش ها و کرنش ها در اعضای تحت بارهای محوری پرداختیم. در این فصل به بررسی پیچش اعضا و به طور ویژه به تحلیل تنش ها و کرنش های اعضای با مقطع دایره ای که تحت تأثیر کوپل های پیچشی یا گشتاورهای پیچشی قرار دارند می پردازیم. این کوپل ها دارای مقدار یکسان اما جهت های مخالفند. کوپل ها کمیتی هایی برداری اند و آن ها را می توان با پیکان های خمیده یا با بردارهای کوپل نشان داد.

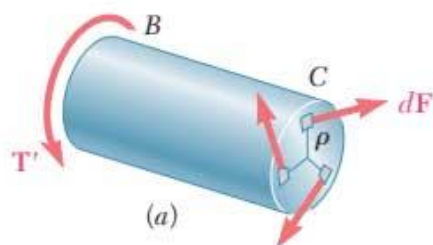


۳-۱-۲- بحث مقدماتی تنش در محورهای گرد

محور AB تحت اثر گشتاور پیچشی است در این حالت عمود بر محور طولی در نقطه C محور را برش می زنیم.



نمودار جسم آزاد بخش BC شامل نیروهای برشی جزئی dF که عمود بر شعاع محور است، رسم می شود.





شرایط تعادل بخش BC را می‌نویسیم. در این رابطه ρ فاصله نیروهای جزیی از محور طولی عضو می‌باشد.

$$\int \rho dF = T$$

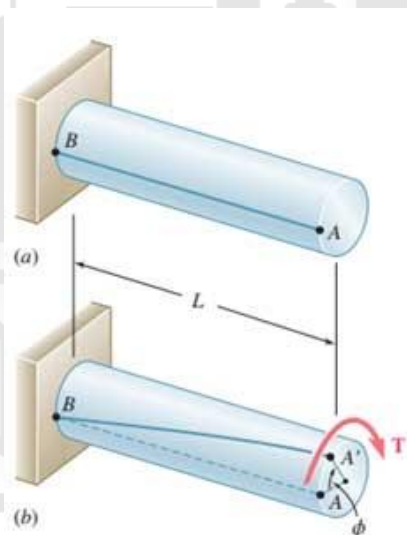
همچنین با توجه به (τ) تنش برشی روی سطح جزیی dA به صورت داریم:

$$dF = \tau dA \rightarrow \int \rho(\tau dA) = T$$

رابطه‌ی به‌دست آمده چیزی در مورد چگونگی توزیع تنش‌ها در مقطع بیان نمی‌کند (توزیع τ بر حسب ρ) بنابراین توزیع واقعی تنش‌ها تحت تأثیر بار مفروض از نظر استاتیکی نامعین است. برای تعیین چگونگی توزیع تنش‌ها باید ابتدا تغییر شکل‌های ایجاد شده در محور را تحلیل نمود.

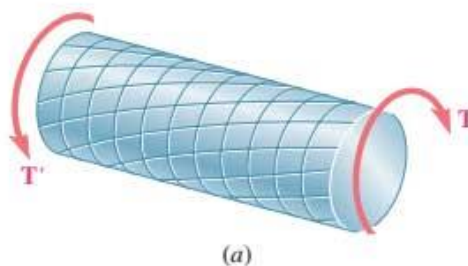
۳-۱-۳- تغییر شکل در محور گرد

محور گردی از یک سمت به تکیه‌گاه گیردار متصل است. به انتهای دیگر محور گشتاور پیچشی T وارد شود. محور به اندازه‌ی زاویه‌ی پیچش (ϕ) چرخش می‌کند. در محدوده‌ی معینی از مقادیر T ، زاویه‌ی پیچش با T متناسب است و با طول L نیز نسبت مستقیم دارد.



در اینجا یک هدف تحلیل به‌دست آوردن رابطه‌ی بین ϕ و L و T است و هدف دیگر تعیین توزیع تنش‌های برشی در محور گرد است.

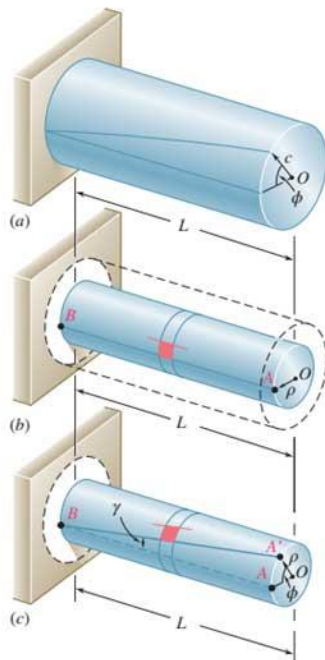
به این نکته توجه کنید که خصوصیت مهم محورهای گرد این است که زمانی که محور گردی تحت پیچش قرار می‌گیرد تمامی مقاطع آن به صورت صفحه‌ای و نتابیده باقی می‌مانند چون محور گرد دارای تقارن محوری است.





برای آن که تمامی مقاطع محور گرد از یک انتها تا انتهای دیگر به صورت صفحه‌ای و نتابیده باقی بمانند باید کوپل‌ها به صفحات صلبی وارد کرد که به دو انتهای محور متصل شده اند. در این حالت تغییر شکل‌های حاصل در سرتاسر طول محور گرد یکنواخت است. همچنین با توجه به اصل سن و نان در پیچش باید از محل اثر لنگر پیچشی انتهایی به اندازه کافی دور باشیم تا تمرکز تنش ناشی از آن در محاسبات وارد نشود.

می‌خواهیم توزیع کرنش‌های برشی در محور گردی به طول L و شعاع C که به اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ پیچانده شده است را تعیین کنیم. برای این کار استوانه‌ای به شعاع ρ از این محور جدا کرده و جزء مربعی کوچکی را فرض می‌کنیم. با اعمال بار پیچشی به محور گرد این جزء کوچک به صورت لوزی تغییر شکل می‌دهد. کرنش برشی γ در یک جزء کوچک معین با تغییر زاویه‌ی میان اضلاع آن جزء اندازه‌گیری می‌شود.



$$AA' = \rho\phi$$

$$AA' = L\gamma$$

$$\rightarrow L\gamma = \rho\phi \rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

زوایا برحسب رادیان

$$\rho = c \rightarrow \gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

۳-۱-۴- تنش‌های محدوده‌ی الاستیک

حال حالتی که تمامی تنش‌های برشی ایجاد شده در محور گرد کمتر از مقاومت تسلیم هستند را بررسی می‌کنیم. در این حالت طبق قانون هوک برای تنش و کرنش برشی داریم:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

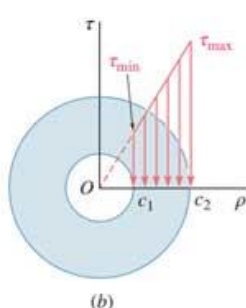
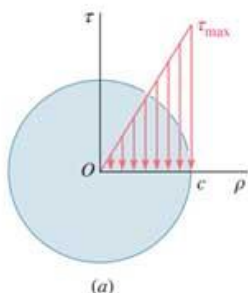
$$\times G \rightarrow$$

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max}$$

$$\tau = G\gamma \rightarrow$$

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

توزیع تنش در محور گرد توپر و توخالی به صورت زیر است. برای محور گرد توخالی داریم:



$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

$$\rightarrow$$

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2} \tau_{\max}$$



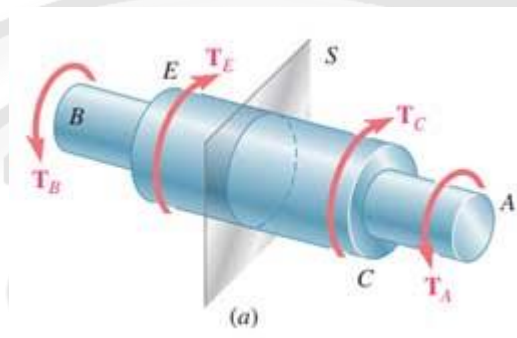
با توجه به بحث مقدماتی تنش در محورهای گرد داریم:

$$\int \rho(\tau dA) = T \xrightarrow{\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}} T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA \xrightarrow{J = \int \rho^2 dA \text{ ممان اینرسی قطبی}} T = \frac{\tau_{\max} J}{c} \rightarrow \tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

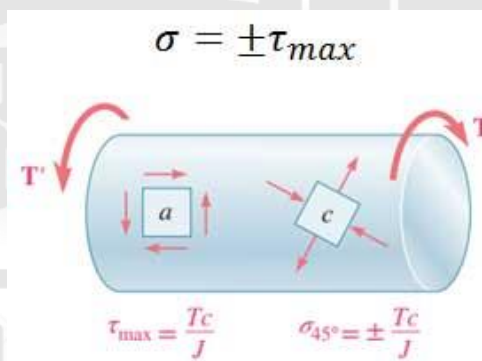
همچنین با توجه به ممان اینرسی قطبی دایره با شعاع C برای ممان اینرسی قطبی لوله (محور گرد توخالی) داریم:

$$J = \frac{1}{2} \pi c_2^4 - \frac{1}{2} \pi c_1^4 = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

از این دو رابطه برای محورهای با مقطع متغیر و یا محوری که از محل دیگری به جز دو انتها تحت پیچش قرار دارند نیز می توان استفاده نمود.



در صورت دوران المان به اندازه ۴۵ درجه تنش های عمودی مقداری برابر با تنش برشی خواهند داشت.



مواد شکل پذیر معمولاً در برش دچار گسیختگی می شوند بنابراین زمانی که ماده ی شکل پذیر تحت پیچش قرار می گیرد در امتداد صفحه های عمود بر محور طولی خود شکسته می شود. مواد شکننده در کشش ضعیف تر از برش اند. بنابراین ماده ی شکننده ی تحت پیچش در امتداد صفحاتی شکسته می شود که بر امتداد کشش حداکثر عموداند یعنی در امتداد صفحاتی که با محور طولی نمونه زاویه ی ۴۵ درجه تشکیل می دهند.



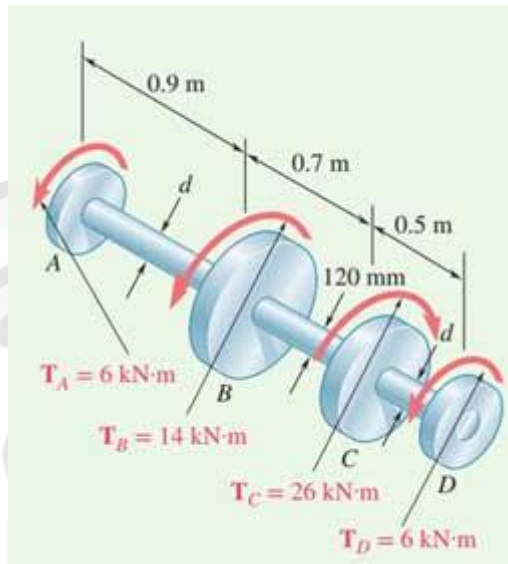


۳-۱-۵- مسئله ۳-۱

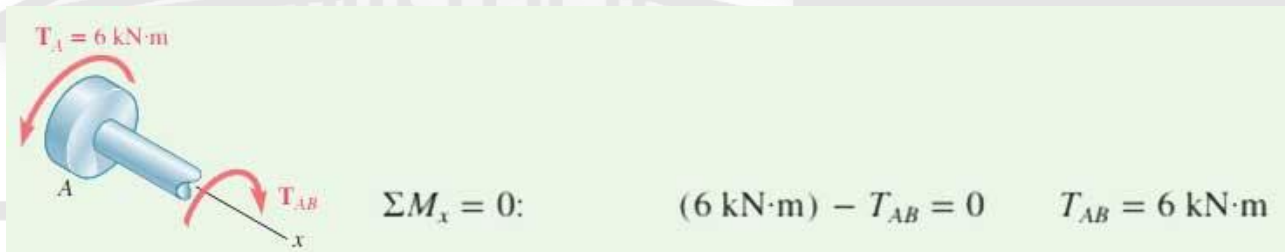
محور BC تو خالی است و قطر داخلی و خارجی آن به ترتیب 90mm و 120mm است. محورهای AB و CD توپر بوده و قطر آنها d است. با توجه به بارگذاری نشان داده شده تعیین کنید:

الف) حداکثر و حداقل تنش برشی در محور BC

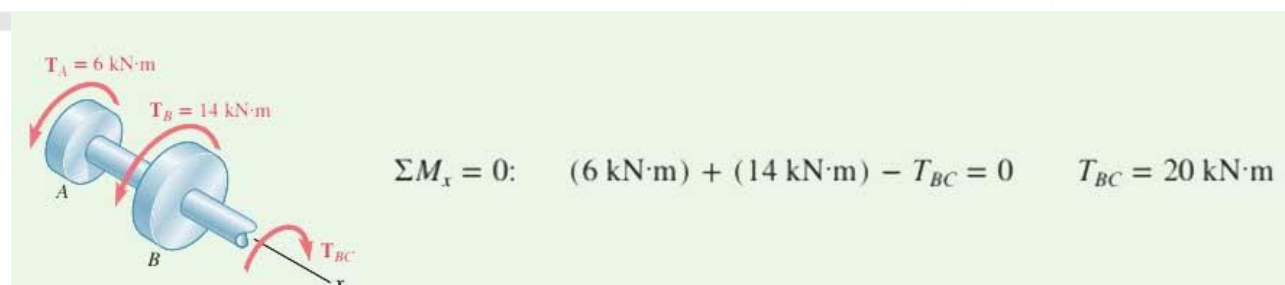
ب) قطر لازم d محورهای AB و CD برای آن که تنش برشی مجاز در این محورها 65MPa باشد.



رسم نمودار جسم آزاد مقطع در محور AB داریم:



رسم نمودار جسم آزاد مقطع در محور BC داریم:



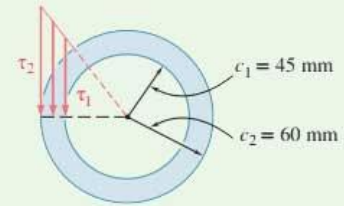


الف) حداکثر و حداقل تنش برشی در محور BC

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN}\cdot\text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad \tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \quad \tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$



ب) قطر لازم d محوره‌های AB و CD برای آن که تنش برشی مجاز در این محورها 65MPa باشد.

$$\tau = \frac{Tc}{J} \quad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN}\cdot\text{m})c}{\frac{\pi}{2}c^4} \quad c^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \quad c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38.9 \text{ mm}) \quad d = 77.8 \text{ mm}$$

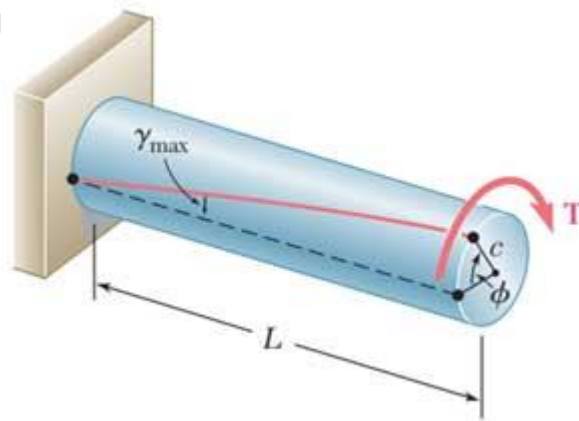
۲-۳-۲: زاویه پیچش در محدوده الاستیک - پیچش در محوره‌های نامعین استاتیکی

۲-۳-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

این آموزش بخش دوم از فصل سوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان پیچش می‌باشد. در این آموزش درباره زاویه پیچش در محدوده الاستیک و پیچش در محوره‌های نامعین استاتیکی بحث خواهیم داشت. در بخش گذشته به بررسی بحث مقدماتی تنش در محوره‌های گرد، تغییر شکل در محور گرد و تنش‌های محدوده الاستیک پرداختیم.

۲-۳-۲: زاویه پیچش در محدوده الاستیک

می‌خواهیم رابطه بین زاویه پیچش ϕ محور گرد و گشتاور پیچشی T را تعیین کنیم. همانند قسمت قبل فرض می‌کنیم که محور گرد به صورت الاستیک باقی بماند (محوری با طول L و شعاع c تحت پیچش T).





از قبل رابطه بین کرنش برشی حداکثر و زاویه پیچش را داریم:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

همچنین از قبل با توجه به قانون هوک داریم:

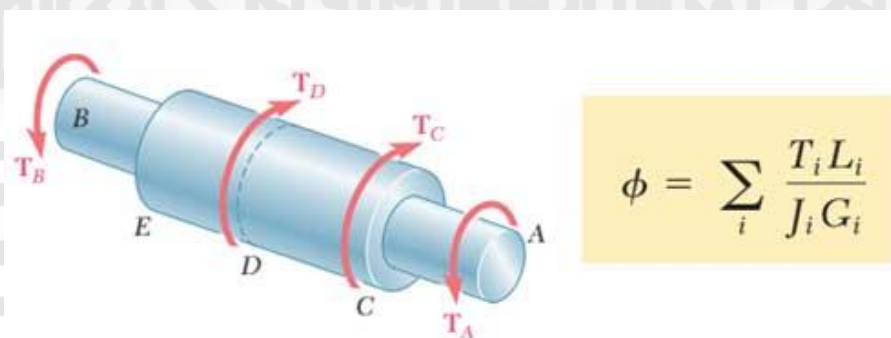
$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

با تساوی قرار دادن سمت راست دو معادله رابطه مورد نظر تعیین می شود که در آن زاویه پیچش بر حسب رادیان است.

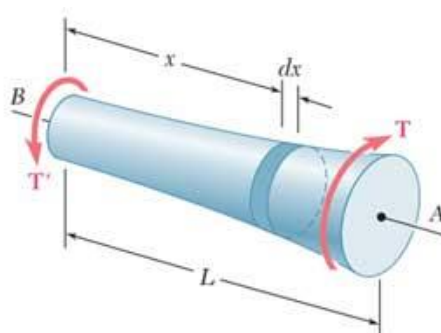
$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

از این روش برای تعیین ضریب صلبیت G یک ماده استفاده می شود.

از این رابطه تنها زمانی می توان استفاده کرد که محور همگن بوده مقطع یکنواختی داشته و تنها از یک انتها بارگذاری شده باشد. اگر گشتاورهای پیچشی در محل های دیگری به جز دو انتهای محور وارد شوند و یا محور از چند بخش با مقاطع و یا مواد مختلف تشکیل شده باشد، باید آن را به بخش های جداگانه تقسیم کرد که هر بخش شرایط لازم برای استفاده از رابطه برخوردار باشد. در همچنین شرایطی زاویه پیچش به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است.



برای محور با سطح مقطع متغیر داریم:



$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{JG}$$



در رابطه حاصل شده محور مورد نظر از یک انتها به تکیه گاه ثابتی متصل بود بنابراین در هر حالت زاویه‌ی پیچش با زاویه‌ی چرخش انتهای آزاد آن برابر بود. حال اگر هر دو انتهای محور بچرخند زاویه‌ی چرخش محور برابر است با زاویه‌ی چرخش یک انتهای آن نسبت به انتهای دیگر.

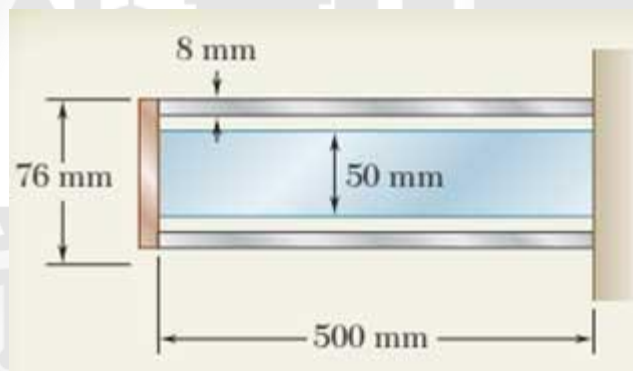
$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG} \quad (\text{زاویه چرخش نسبی})$$

۳-۲-۳- پیچش در محورهای نامعین استاتیکی

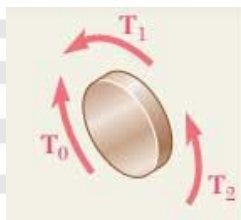
اگر محور نامعین استاتیکی باشد یعنی گشتاورهای پیچشی خارجی (گشتاورهای پیچشی وارد بر محور از طرف تکیه‌گاه) را نتوان با کمک نمودار جسم آزاد تعیین کرد، باید از معادلات تعادل همراه با روابط تغییر شکل محور (با توجه به هندسه) استفاده نمود.

۳-۲-۴- مسئله ۵-۳

محوری فولادی و لوله‌ای آلومینیمی به صورت نشان داده شده در تصویر مقطع برش خورده به تکیه‌گاه ثابت و دیسکی صلب متصل‌اند. با فرض صفر بودن تنش‌های اولیه و تنش برشی مجاز 120MPa محور فولادی و 70MPa لوله‌ی آلومینیمی، حداکثر مقدار گشتاور پیچشی T_0 قابل اعمال به دیسک را تعیین کنید. برای فولاد از $G=77\text{GPa}$ و برای آلومینیم از $G=27\text{GPa}$ استفاده کنید.



نمودار جسم آزاد دیسک را رسم می‌کنیم:



$$T_0 = T_1 + T_2$$

T_1 : گشتاور پیچشی وارده به دیسک از طرف لوله

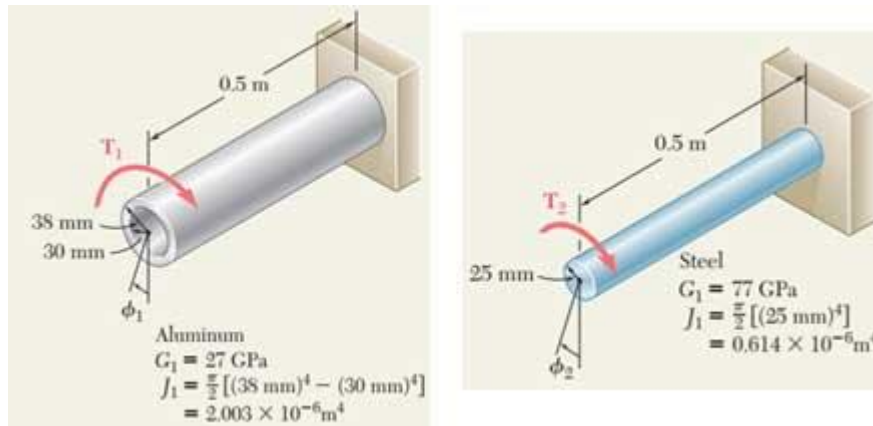
T_2 : گشتاور پیچشی وارده به دیسک از طرف محور

براساس تغییر شکل‌ها داریم: (لوله و محور هر دو به دیسک صلب متصل هستند).

$$\phi_1 = \phi_2: \quad \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$



با محاسبه ممان اینرسی قطبی برای محور و لوله داریم:



بنابراین:

$$\frac{T_1(0.5 \text{ m})}{(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(27 \text{ GPa})} = \frac{T_2(0.5 \text{ m})}{(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \text{ GPa})} \quad T_2 = 0.874T_1$$

براساس تنش برشی: با فرض اینکه در آلومینیم $\tau \leq 70 \text{ MPa}$ حالت بحرانی داشته باشد:

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{alum}} J_1}{c_1} = \frac{(70 \text{ MPa})(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.038 \text{ m}} = 3690 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_2 = 0.874T_1 \quad T_2 = 0.874T_1 = 0.874(3690) = 3225 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\text{steel}} = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{(3225 \text{ N} \cdot \text{m})(0.025 \text{ m})}{0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 131.3 \text{ MPa}$$

مشخص است که از تنش برشی مجاز فولاد یعنی 120 MPa تجاوز شده است و فرض ما اشتباه بوده است. بنابراین حداکثر گشتاور پیچشی T_0 را با استفاده از $\tau_{\text{steel}} = 120 \text{ MPa}$ به دست می‌آوریم

$$T_2 = \frac{\tau_{\text{steel}} J_2}{c_2} = \frac{(120 \text{ MPa})(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.025 \text{ m}} = 2950 \text{ N} \cdot \text{m} \quad T_2 = 0.874T_1 \quad T_1 = 3375 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_0 = T_1 + T_2 = 3375 \text{ N} \cdot \text{m} + 2950 \text{ N} \cdot \text{m} \quad T_0 = 6.325 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

۳-۳- بخش ۳: طراحی محورهای انتقال نیرو - تمرکز تنش در محورهای گرد

۳-۳-۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

این آموزش بخش سوم از فصل سوم کتاب مقاومت مصالح بیر جانسون با عنوان پیچش می‌باشد. در این آموزش درباره طراحی محورهای انتقال نیرو و تمرکز تنش در محورهای گرد بحث خواهیم داشت. در بخش گذشته به بررسی زاویه پیچش در محدوده الاستیک و پیچش در محورهای نامعین استاتیکی پرداختیم.



۳-۳-۲- طراحی محورهای انتقال نیرو

مشخصات اصلی لازم در طراحی محورهای انتقال نیرو شامل توانی که باید انتقال داد و سرعت چرخش محور می‌باشد. گشتاور پیچشی وارد بر محور براساس دینامیک تعیین می‌شود.

$$P = T\omega \quad \omega = 2\pi f$$

$$P = 2\pi f T \rightarrow T = \frac{P}{2\pi f}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \rightarrow \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}}$$

از قبل داریم:

در روابط بالا:

P : توان (وات) (W)

T : گشتاور پیچشی (N.m)

ω : سرعت زاویه‌ای

f : فرکانس (هرتز) (Hz)

بنابراین حداقل مقدار مجاز J/c حاصل می‌شود. مشخصاً وظیفه طراح انتخاب جنس و اندازه‌ی مقطع محور به گونه‌ای است که در زمان انتقال توان مورد نیاز با سرعت مشخص شده از تنش برشی مجاز حداکثر ماده‌ی مورد استفاده در ساخت محور تجاوز نشود.

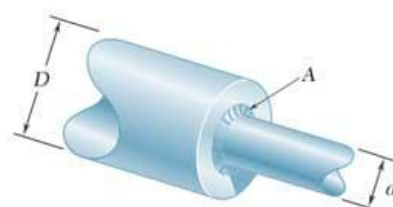
۳-۳-۳- تمرکز تنش در محورهای گرد

در جلسات قبل رابطه زیر را برای محور گرد با مقطع یکنواخت به دست آوردیم. همچنین فرض کردیم که محور از دو انتها توسط صفحات صلب انتهایی بارگذاری می‌شود.

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

اما در عمل اینگونه نیست و توزیع تنش‌ها در محل و نزدیکی مقطع اعمال گشتاور پیچشی با مقدار به دست آمده از رابطه متفاوت هست. بنابراین در این محل‌ها تمرکز تنش داریم. برای محاسبه این تنش‌های موضعی از روش‌های تجربی یا نظریه‌های ریاضی استفاده می‌شود.

همان طور که قبلاً گفتیم از رابطه‌ی پیچش می‌توان برای محوری با سطح مقطع دایره‌ای متغیر نیز استفاده کرد. اما در مورد محوری که قطر مقطع آن به طور ناگهانی تغییر می‌کند در نزدیکی ناپیوستگی تمرکز تنش روی می‌دهد و بزرگترین تنش‌ها در نقطه‌ی A مانند تصویر ایجاد می‌شوند. این تنش‌ها را می‌توان با استفاده از ماهیچه کاهش داد.

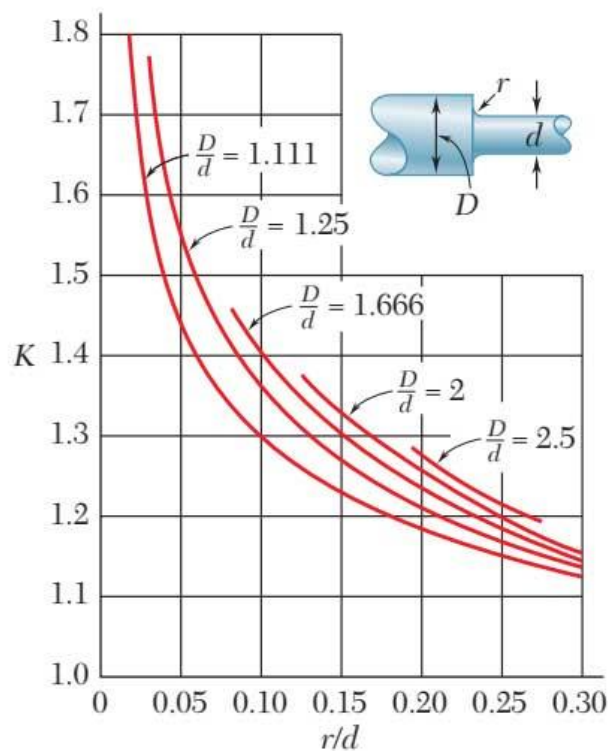




حداکثر مقدار تنش برشی در محل ماهیچه با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J}$$

در رابطه بالا Tc/J تنش محاسبه شده‌ی محور کم قطرتر و K ضریب تمرکز تنش است. ضریب تمرکز تنش به نسبت دو قطر (D/d) و نسبت شعاع ماهیچه به قطر محور کوچکتر (r/d) بستگی دارد.



*این روش تا زمانی معتبر است که مقدار تنش ماکسیمم محاسبه شده با این رابطه از حد تناسب ماده تجاوز نکند. زیرا K با فرض خطی بودن رابطه بین تنش و کرنش برشی حساب شده است.

۴- مراجع

Beer, Ferdinand, P. and Johnston, E, Russell. and DeWolf, John. and Mazurek, David. (2020). Mechanics of Materials. 8th Edition. McGraw Hill