

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جدول شناسنامه اثر	
کد آموزش	۳۱۳-۰۰۱-۰۰۸
عنوان اثر	آموزش استاتیک (Statics) – نیروهای گسترده بخش اول
تالیف	گروه مهندسی سیویل ژئوتک (civilgeotech)
گردآورنده	مهندس سید محمد صادق آل محمد
آدرس سایت	https://civilgeotech.ir/
ایمیل	info@civilgeotech.ir
نوع	فایل pdf
تعداد کل صفحات	۱۱ صفحه
فرهیخته گرامی:	
بازنشر این فایل باعث تضییع حقوق مادی و معنوی سایت سیویل ژئوتک خواهد شد و کپی بخش یا تمام این اثر شرعا و قانونا حرام و ممنوع است. لطفا فایل این آموزش را از سایت اصلی ما دریافت کنید.	

CIVILGEOTECH

فهرست مطالب

۲	نیروهای گسترده بخش اول
۲	۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...
۲	۲- نیروهای گسترده
۳	۳- مرکز جرم
۴	۴- مرکز هندسی
۵	۴-۱- نکات انتخاب دیفرانسیل
۷	۵- مسائل
۷	۵-۱- مسئله ۱
۷	۵-۲- مسئله ۲
۸	۶- روش‌های تقریبی در تعیین مرکز هندسی اجسام مرکب
۹	۷- مسائل
۹	۷-۱- مسئله ۳
۱۰	۷-۲- مسئله ۴
۱۰	۸- مراجع

CIVILGEOTECH

نیروهای گسترده بخش اول

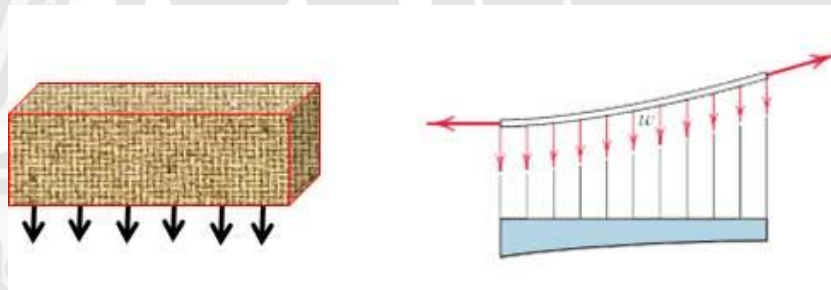
۱- آنچه در این آموزش خواهیم خواند...

فصل پنجم از کتاب استاتیک مریام به بحث نیروهای گسترده پرداخته است. این فصل را در سه آموزش بررسی می‌کنیم. در این آموزش مباحث مرکز جرم و مرکز هندسی را شرح خواهیم داد. در آموزش نیروهای گسترده بخش دوم مباحث نیروهای خارجی و داخلی وارد به تیرها بررسی خواهند شد. در آموزش نیروهای گسترده بخش سوم نیز به حل مسئله رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی می‌پردازیم.

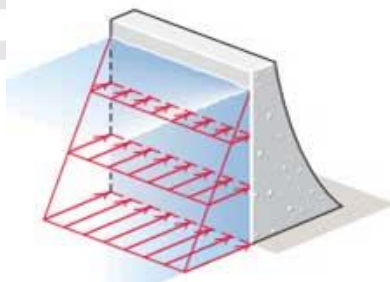
۲- نیروهای گسترده

نیرویی که ابعاد محل اثر آن نسبت به ابعاد جسم ناچیز است را نیروی متمرکز یا نقطه‌ای (Concentrated Force) می‌گوییم. همچنین باید توجه نمود که به صورت واقعی نیروی متمرکز نداریم. در هنگامی که نیروها بر ناحیه‌ای از جسم که در مقایسه با سایر ابعاد آن قابل ملاحظه است وارد شوند را باید به صورت گسترده در نظر گرفت. نیروهای گسترده شامل نیروهای خطی، نیروهای سطحی و نیروهای حجمی (Body Force) است. باید بدانیم که توزیع نیرو به معنای تقسیم و گسترش نیرو در یک سطح، خط و یا حجم است اما شدت نیرو به معنای میزان و اندازه نیرو می‌باشد. بنابراین می‌توان اینگونه گفت که توزیع نیرو، تغییرات (آهنگ تغییرات) شدت (اندازه) نیرو است.

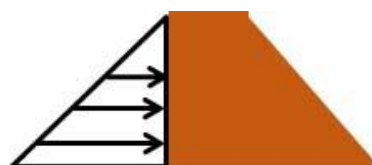
در توزیع خطی، نیرو در طول یک خط وارد می‌شود و عرض محل اثر نیرو ناچیز است. مانند نیروی وارد بر یک کابل یا نیروی دیوار. واحد شدت نیرو در این حالت نیرو بر طول خط است و برحسب نیوتن بر متر (N/m) بیان می‌شود.



در توزیع سطحی، نیرو بر روی یک سطح مشخص توزیع شده است. مانند فشار آب پشت سد، نیروی باد و یا نیروی خاک مجاور دیوار زیرزمین. در سیالات این شدت نیرو را فشار (Pressure) و در جامدات به این شدت نیروی داخلی تنش (Stress) گفته می‌شود. واحد شدت نیرو در این حالت نیرو بر سطح است و برحسب نیوتن بر متر مربع (N/m^2) بیان می‌شود.



به عنوان یک نکته در یک مقطع عرضی از سد می‌توان توزیع نیرو را به صورت خطی در نظر گرفت.

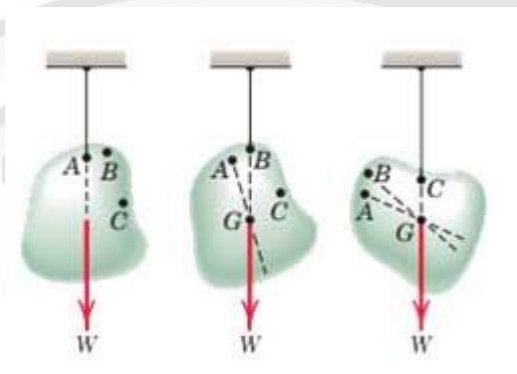


در توزیع حجمی، نیرو در حجم یک جسم توزیع می‌شود. مانند نیروی گرانش و نیروی تراوش در مکانیک خاک. واحد شدت نیرو در این حالت نیرو بر حجم است و برحسب نیوتن بر متر مکعب (N/m^3) بیان می‌شود.

خوب است بدانیم که شدت نیروی گرانش را وزن مخصوص نیز می‌نامند. وزن مخصوص را با γ نمایش می‌دهند و برابر است با حاصل ضرب چگالی (ρ) در شتاب گرانش (g). بنابراین: ($\gamma = \rho g$)

۳- مرکز جرم

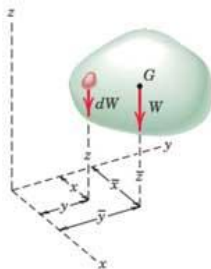
محل اثر برآیند نیروهای جاذبه (گرانش) را مرکز ثقل یا گرانیگاه جسم گوئیم. برای یافتن مرکز ثقل می‌توان از آزمایشی که شرح می‌شود استفاده نمود. جسمی با جرم m را از نقطه دلخواه A آویزان کرده. جسم در حال تعادل است و برآیند نیروها در امتداد طناب است. همین مراحل را با نقاط مانند B و C تکرار می‌کنیم. این خطوط اثر، همگی در یک نقطه موسوم به مرکز ثقل به هم می‌رسند.



برای تعیین مکان مرکز ثقل یک جسم از اصل گشتاورها (تعمیم قضیه وارینون) استفاده می‌کنیم. بر این اساس گشتاور نیروی برآیند گرانش W حول هر محور دلخواهی برابر با مجموع گشتاورهای نیروهای گرانش dW وارد به هر یک از ذرات جسم حول آن محور است. بنابراین برآیند نیروی گرانش برابر با وزن جسم است.

$$W = \int dW$$

به عنوان مثال اصل گشتاورها حول محور y را می‌نویسیم:



$$\bar{x}W = \int x dW$$

گشتاور وزن یک ذره کوچک $x dW$

مجموع گشتاور وزن تمامی ذرات $\int x dW$

گشتاور وزن کل جسم $\bar{x}W$

بنابراین روابط مختصات مرکز ثقل به صورت زیر خواهد بود.

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W} \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{W} \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{W}$$



با جایگزینی $W=mg$ و $dW=gdm$ روابط بالا به صورت زیر خواهد بود. این روابط مستقل از اثرات گرانشی هستند و تنها تابعی از توزیع جرم است. بنابراین این روابط مختصات مرکز جرم را نشان می‌دهند

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m}$$

جرم یک جزء بسیار کوچک با حجم dV براساس رابطه چگالی برابر $dm=\rho dV$ خواهد بود. بنابراین جرم کل جسم به صورت زیر خواهد بود.

$$m = \int dm = \int \rho dV$$

بنابراین روابط مختصات مرکز حجم به صورت زیر می‌شود:

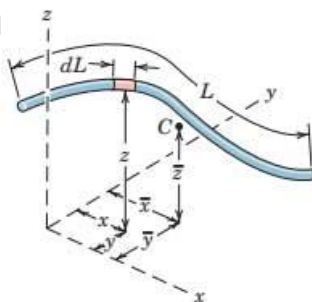
$$\bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{z} = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV}$$

در محاسبات مرکز جرم، محورهای مختصات به نحوی انتخاب شود که با توجه به مرزهای فیزیکی جسم حل معادلات تا حد امکان ساده شود. هرگاه یک جسم همگن دارای خط یا صفحه تقارن باشد، یکی از محورهای مختصات را منطبق بر این خط یا صفحه انتخاب می‌کنیم. مرکز جرم همواره بر این خط یا صفحه تقارن واقع خواهد بود. زیرا گشتاور این ذرات نسبت به این خط یکدیگر را خنثی می‌کنند.

۴- مرکز هندسی

اصطلاح مرکز هندسی را تنها زمانی بکار می‌بریم که محاسبات صرفاً مربوط به یک شکل هندسی محض باشد. اگر چگالی در سراسر جسم یکنواخت باشد مرکز هندسی و مرکز جرم بر هم منطبق خواهند بود. بر اساس اینکه یک جسم واقعی را به صورت یک خط (منحنی)، سطح و یا حجم بتوان مدلسازی کرد، مرکز هندسی اجسام محاسبه می‌شود.

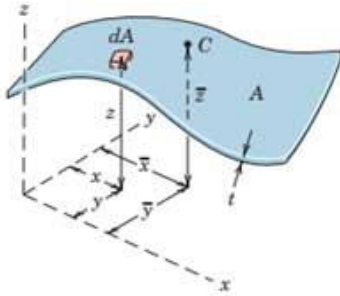
برای محاسبه مرکز هندسی خط، یک میله نازک با طول L سطح مقطع A و چگالی ρ فرض می‌کنیم. اگر چگالی و سطح مقطع در طول خط (میله) ثابت باشد، مرکز هندسی بر مرکز جرم منطبق است. همچنین جرم یک جزء کوچک از آن خط برابر $dm=\rho A dL$ خواهد بود. با استفاده از روابط مرکز جرم داریم:



$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$

در حالت کلی مرکز هندسی یک خط می‌تواند بر آن واقع نباشد. اگر یک خط در صفحه $x-y$ قرار گیرد برای یافتن مرکز هندسی آن تنها دو مولفه $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نیاز است.

برای محاسبه مرکز سطح، یک پوسته جدار نازک با ضخامت کوچک اما ثابت t را فرض می‌کنیم. اگر ρ و t ثابت باشند، مرکز هندسی بر مرکز جرم منطبق است. همچنین مساحت سطح را برابر A می‌گیریم. بنابراین با استفاده از روابط مرکز جرم داریم:



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

صورت کسرها در معادلات بالا را گشتاور اول سطح (First Moments of Area) می‌نامند.

$$Q_x = A\bar{y} = \int y dA = \text{گشتاور اول سطح حول محور } x$$

$$Q_y = A\bar{x} = \int x dA = \text{گشتاور اول سطح حول محور } y$$

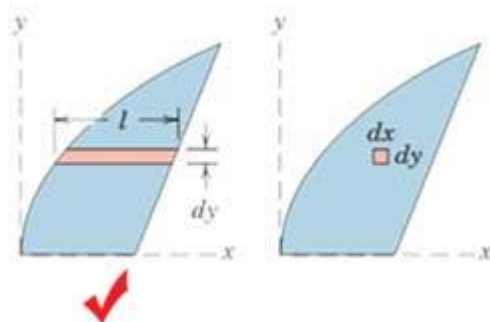
در حالت کلی مرکز هندسی سطوح منحنی بر آن واقع نیست. اگر یک سطح در صفحه $x-y$ قرار گیرد برای یافتن مرکز سطح تنها دو مولفه $\bar{x}$ و $\bar{y}$ نیاز است.

برای محاسبه مرکز حجم، یک جسم با حجم V و چگالی ρ فرض می‌کنیم. اگر ρ در کل جسم ثابت باشد، مرکز هندسی بر مرکز جرم منطبق است. همچنین جرم یک جزء کوچک از آن خط برابر $dm = \rho dV$ خواهد بود. با استفاده از روابط مرکز جرم داریم:

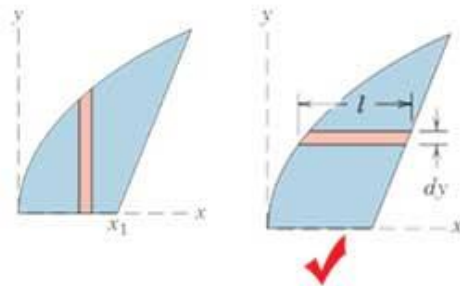
$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

۴-۱- نکات انتخاب دیفرانسیل

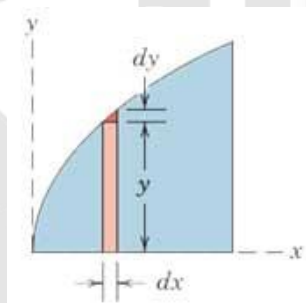
۱- یک دیفرانسیل مرتبه اول را در مقایسه با دیفرانسیل‌های مراتب بالاتر انتخاب کنید. در اینصورت تنها یکبار انتگرال‌گیری نیاز خواهیم داشت. به عنوان مثال در شکل زیر با انتخاب یک نوار افقی به عنوان دیفرانسیل سطح به صورت $dA = l dy$ تنها به یک بار انتگرال‌گیری نسبت به y نیاز خواهیم داشت. در حالی که برای دیفرانسیل مرتبه دوم $dx dy$ نیاز به دو بار انتگرال‌گیری، یک بار نسبت به x و به بار دیگر نسبت به y نیاز خواهد بود.



۲- با یک بار انتگرال گیری پیوسته کل محدوده انتگرال گیری پوشش داده شود. برای مثال قطاع افقی در شکل زیر در مقایسه با قطاع عمودی ترجیح داده می شود. زیرا در صورت انتخاب قطاع عمودی به سبب ناپیوستگی تابع ارتفاع قطاع در $x = x_1$ ناگزیر به دو بار انتگرال گیری در دو فاصله مجزا خواهیم بود.

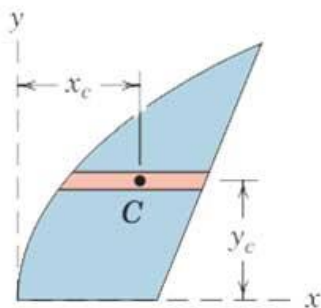


۳- از جملات مرتبه بالا چشم پوشی شود. به عنوان مثال بهتر است که نوار عمودی سطح در زیر منحنی شکل زیر را با دیفرانسیل مرتبه اول $dA = ydx$ بیان کنیم و از دیفرانسیل مرتبه دوم سطح مثلثی $\frac{1}{2}(dx dy)$ اجتناب نماییم.



۴- محورهای مختصات به گونه ای انتخاب شود که بیشترین هماهنگی با مرزهای فیزیکی جسم مورد نظر داشته باشد.

۵- برای بیان بازوی گشتاور دیفرانسیل برای محاسبه گشتاور آن، باید از مختصات مرکز هندسی دیفرانسیل استفاده کنیم. بنابراین روابط زیر برای بیان مختصات مرکز هندسی دیفرانسیل استفاده می شود.



$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z_c dA}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dV}{V}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dV}{V}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z_c dV}{V}$$

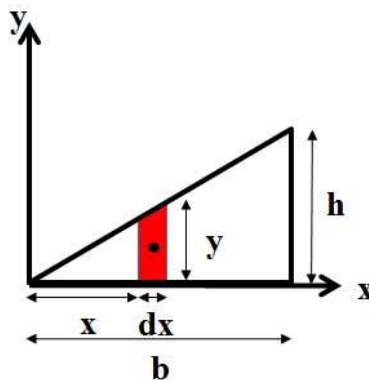
۵- مسائل

برای فهم بهتر حل مسائل می‌توانید به ویدیو مراجعه کنید.

۵-۱- مسئله ۱

مرکز هندسی یک مثلث قائم زاویه را حساب کنید.

یک ضلع مثلث را بر محور X منطبق کرده‌ایم.



مساحت نوار باریک $dA = ydx$ خواهد بود. حال با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

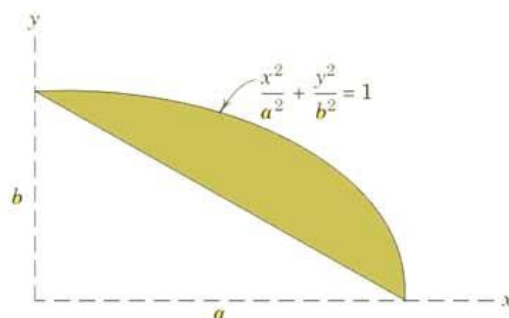
$$\frac{y}{x} = \frac{h}{b} \rightarrow y = \frac{h}{b}x$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} = \frac{\int x \times y dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\int x \times \frac{h}{b} x dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{h}{b} \int_0^b x^2 dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{h}{b} \times \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^b}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{h}{b} \times \frac{1}{3} (b^3 - 0)}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{hb^2}{3}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2}{3}b$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A} = \frac{\int \frac{y}{2} \times y dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b y^2 dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{h}{b}x\right)^2 dx}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{h^2}{2b^2} \times \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^b}{\frac{bh}{2}} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

۵-۲- مسئله ۲

مرکز هندسی شکل زیر را حساب کنید.



برای مشاهده حل این سوال به صفحه آموزش (حل تمرین استاتیک تمامی فصل‌ها) مراجعه کنید.

۶- روش‌های تقریبی در تعیین مرکز هندسی اجسام مرکب

اگر بتوانیم یک جسم را به بخش‌های متعدد تقسیم کنیم به گونه‌ای که مرکز جرم یا مرکز هندسی این بخش‌ها به سادگی قابل محاسبه باشد، می‌توان هر بخش را به عنوان یک جزء محدود از کل در نظر گرفت و اصل گشتاورها را برای این مجموعه بکار گرفت. بنابراین در این حالت برای محاسبه مرکز جرم و مرکز سطح می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$\bar{X} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} \quad \bar{Y} = \frac{\sum m_i \bar{y}_i}{\sum m_i} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m_i \bar{z}_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} \quad \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \quad \bar{Z} = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i}$$

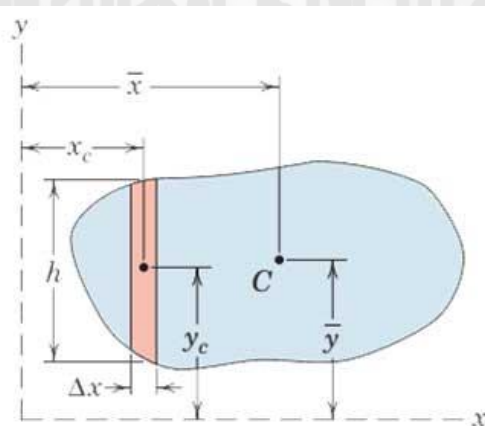
در این روش در صورت وجود حفره، جرم، سطح و یا حجم مورد نظر منفی در نظر گرفته می‌شود.

گشتاور اول سطح نیز در این حالت به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i = \bar{Y} \sum A_i = \text{گشتاور اول سطح حول محور } x$$

$$Q_y = \sum A_i \bar{x}_i = \bar{X} \sum A_i = \text{گشتاور اول سطح حول محور } y$$

برای محاسبه مرکز سطح یک شکل هندسی نامنظم از روش تقریبی زیر استفاده می‌کنیم. برای مثال با توجه به به شکل زیر یک سطح نامنظم با مرکز هندسی C را در نظر بگیرید. مساحت المان قرمز رنگ با ارتفاع متغیر h به صورت $A = h \Delta x$ خواهد بود. حال همانند روابط قبل در این حالت مختصات مرکز سطح به صورت زیر خواهد بود:



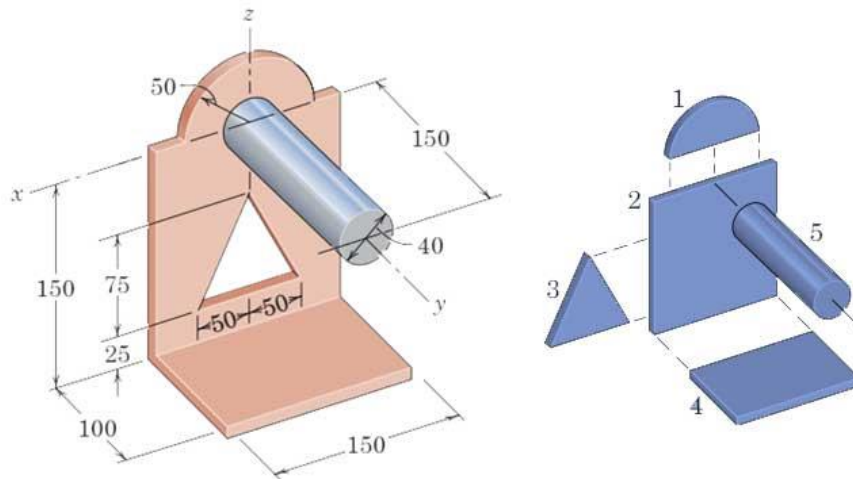
$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_{ci}}{\sum A_i} \quad \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_{ci}}{\sum A_i}$$

۷- مسائل

برای فهم بهتر حل مسائل می‌توانید به ویدیو مراجعه کنید.

۷-۱- مسئله ۳

مرکز جرم جسم مرکب زیر را محاسبه کنید. سطح عمودی از ورقی با جرم واحد سطح 25 kg/m^2 است. جرم واحد سطح ورق افقی 40 kg/m^2 و چگالی شفت 7.83 Mg/m^3 است.



اندازه‌ها به میلی‌متر است.

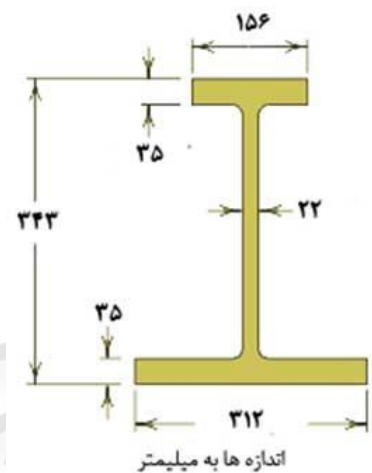
با توجه به اینکه جسم نسبت به محور Z دارای تقارن است مختصه $\bar{X}$ صفر است. اجزاء معادلات را در جدول زیر نوشته‌ایم.

جزء	مساحت / حجم	جرم	مختصه مرکز جرم	مختصه مرکز جرم	$m\bar{y}, \text{kg.m}$	$m\bar{z}, \text{kg.m}$
	$s, \text{m}^2/\text{v}, \text{m}^3$	$m, \text{kg} = s \rho_A$	$\bar{z}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$		
۱) (نیم‌دایره)	$s = (\pi r^2)/2 = 0.0039$	0.098	$= \frac{4r}{3\pi} = 21.2$	(بی بعد) 0	0	2.08
۲) مربع عمودی	$s = ab = 0.0225$	0.562	$= \frac{a}{2} = -75$	(بی بعد) 0	0	-42.19
۳) مثلث	$s = hb/2 = -0.0038$	-0.094	$= -(150 - 25 - 1/3 \times 75) = -100$	(بی بعد) 0	0	9.38
۴) مستطیل افقی	$s = ab = 0.015$	0.6	-150	50	30	-90
۵) شافت	$v = \pi r^2 h = 0.00019$	1.476	0 (تقارن)	75	110.7	0
مجموع	-	2.642	-	-	140.7	-120.73

$$\bar{Y} = \frac{\sum m_i \bar{y}_i}{\sum m_i} = \frac{140.7}{2.642} = 53.3 \text{ mm} \quad \bar{Z} = \frac{\sum m_i \bar{z}_i}{\sum m_i} = \frac{-120.73}{2.642} = -45.7 \text{ mm}$$

۷-۲- مسئله ۴

مرکز سطح تیر زیر را بیابید.



برای مشاهده حل این سوال به صفحه آموزش (حل تمرین استاتیک تمامی فصل‌ها) مراجعه کنید.

۸- مراجع

Meriam, J. L. and Kraige, L. G. (2011). Engineering Mechanics Volume 1: Statics. 7th Ed. John Wiley and Sons Inc.